

Geometrische
Lehrsätze und Aufgaben

aus des

Herrn Professor C. F. A. Jacobi

Anhängen

zu

van Swinden's Elementen der Geometrie.

Mit

Beweisen, Auflösungen und Zusätzen

herausgegeben

von

Dr. August Wiegand,

Oberlehrer an der Realschule in den Francke'schen Stiftungen
zu Halle.

Erster Band.



Halle,

Schmidt's Verlagsbuchhandlung.

1847.

Geometrische

Lehrbuch und Aufgaben

von

Herrn Professor E. F. A. Jacob

Aachen

1857 Zweite, verbesserte Auflage der Geometrie

in

Heftchen, Auflösungen und Zusätze

herausgegeben

von

Dr. August Wiegand

Gelehrter an der Hochschule in den Provinzialen Stiftungen
zu Halle

X 1625131

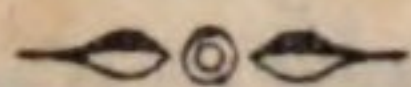
Geometrie



Verlagsbuchhandlung

1857

V o r w o r t.



Unter der Fluth von Lehrbüchern und Aufgabensammlungen für die Geometrie, die alljährlich uns überschwemmen, findet sich — leider! — nur selten eins, welches auf die grossartigen Fortschritte der neuern Geometrie gebührende Rücksicht nimmt. Der bei Weitem grösste Theil hält sich in den allhergebrachten Schranken, und mit einer neu erschienenen Aufgabensammlung kauft man in der Regel nichts weiter als alte Waare, die man schon in zehn Exemplaren zu Hause besitzt. Eine natürliche Folge davon ist, dass der oft schon durch solche Schriften getäuschte Mathematiker jede neue Erscheinung in diesem Felde misstrauisch zurückweist, desshalb auch die vereinzelt besseren Werke übersieht, und diese nun ebenfalls die verdiente Aufnahme und Würdigung nicht finden. Letzteres gilt namentlich auch von Jacobi's vortrefflicher, durch reichhaltige, die Fortschritte der neuern Geometrie berücksichtigende Anhänge vermehrter Uebersetzung von van Swinden's Elementen der Geometrie. Jena 1834. Nach unserer Ueberzeugung kann kein Lehrer der Mathematik dieses vortreffliche Buch entbehren, und zwar nicht blos nach unserer Meinung, sondern nach der eines Jeden, der sich die Mühe nicht verdriessen liess, von dem reichen Inhalte genannten Werkes Kenntniss zu nehmen. So sagt Professor Dr. Paucker in der Vorrede zu seinen Fundamenten der Geometrie: Wenn dieses Werk (Jacobi's Uebersetzung) etwas übersichtlicher geordnet, die Zusätze etwas mehr begründet und entwickelt wären, so würde es unstreitig die erste Stelle unter den deutschen Lehrbüchern einnehmen. Die fast gänzlich fehlenden Beweise und Auflösungen für die Lehrsätze und Aufgaben in den Anhängen ist nun allerdings ein Uebelstand, der Jedem, der sich des Buchs

bedient, fühlbar wird. So sagt Oberlehrer Hertel in der Vorrede zu seiner Aufgabensammlung, nachdem er vorher von der Reichhaltigkeit der Jacobi'schen Uebersetzung von van Swinden's Elementen der Geometrie gesprochen: In den ausgezeichneten Anhängen des Herrn Uebersetzers ist die Auflösung nur den wenigsten Aufgaben beigefügt und dadurch, bei den minder einfachen, dem Lehrer ziemlich gleiche Arbeit mit dem Schüler gegeben. Ist aber irgend ein Lehrbuch geeignet, die Selbstthätigkeit des Lernenden zu wecken, so ist es das genannte durch diese Anhänge.

Durch diese Aussprüche erscheint nun gewiss unser Unternehmen gerechtfertigt, die genannten Anhänge selbstständig mit Beweisen und Auflösungen herauszugeben, und wir dürfen hoffen, uns hierdurch den Dank des mathematischen Publikums zu erwerben. Wir haben es vorgezogen, das gesammte Material auf einzelne Bände zu vertheilen, um Jedem Gelegenheit zu geben, das sich auszuwählen, was ihm gerade in seinen Verhältnissen Bedürfniss ist.

Bei den gegebenen Beweisen und Auflösungen haben wir stets diejenigen der anzuwendenden Sätze, die in den gewöhnlichen Lehrbüchern seltener zu finden sind, besonders mit ihren Beweisen eingeschaltet, so dass die aus jedem brauchbaren Lehrbuche der Geometrie geschöpften Vorkenntnisse zum Verständniss des Ganzen vollkommen hinreichend sind.

Wenn wir uns deshalb an unser jetzt in zweiter Auflage erscheinendes Lehrbuch der Planimetrie (Lehrbuch der Planimetrie für den Schul- und Privatunterricht von Dr. August Wiegand. 2 Bände.) anschliessen und in den Citaten *) auf dasselbe verweisen, so ist

*) Citate, vor denen das Paragraphzeichen fehlt, beziehen sich auf die Aufgabensammlung selbst, die übrigen auf das genannte Lehrbuch der Planimetrie, und zwar zeigen die vorgesetzten Zahlen I. oder II. die Bände desselben an.

diess blos geschehen, um einen bestimmten Anhaltepunkt in dieser Beziehung zu haben. Bei der Bearbeitung haben wir uns an die Sätze in van Swinden's Geometrie, denen die einzelnen Abschnitte der Anhänge beigegeben sind, gehalten, doch nicht mit so absoluter Gewissenhaftigkeit, dass wir nicht da, wo sich das Ziel unverhältnissmässig rascher durch einen späteren Satz erreichen liess, davon abgegangen wären. Es ist diess gleichwohl nur zwei- oder dreimal geschehen. Wir hielten diess um so mehr für statthast, da ja ohnedies ein nicht unbedeutender Theil jener Anhänge wohl kaum schon von Schülern bewilligt werden dürfte, die in ihrer mathematischen Ausbildung noch nicht über jene Sätze hinausgekommen sind.

Da geometrische Aufgaben verhältnissmässig nur den kleineren Theil der Anhänge bilden, so haben wir in einem besonderen Abschnitte vermischte Aufgaben zugegeben, wovon namentlich der zweite Band, der recht bald nachfolgen soll, eine reiche, die Fortschritte der neueren Geometrie ganz besonders berücksichtigende Auswahl enthalten wird.

Noch muss ich eines Umstandes gedenken, aus dem vielleicht der Eine oder Andere einen Vorwurf machen wird. Die Lehrsätze und Aufgaben bilden kein geordnetes geometrisches System. Mein verehrter Lehrer und Freund der Herr Schulrath Müller in Wiesbaden spricht in seinem vortrefflichen Lehrbuche der Geometrie die Ansicht aus, dass eine systematisch geordnete Aufgabensammlung, in welcher sich die einzelnen mathematischen Wahrheiten organisch an einander anschliessen und wo also dem Schüler der Weg gebahnt ist, auf dem er fortgehen und selbstständig neue Wahrheiten auffinden kann, die geeignetste für tüchtige mathematische Ausbildung sei. Wir unterschreiben das von ganzer Seele und finden namentlich die in den ersten Bogen uns vorliegenden und demnächst erscheinenden Aufgabensysteme des Herrn Schulrath Müller, auf die schon im Voraus aufmerksam

zu machen wir uns gedrungen fühlen, zur Erreichung jenes Zweckes vorzüglich geeignet; gleichwohl sind wir der Meinung, dass Aufgabensammlungen mit vereinzelt, frei dastehenden Sätzen auch ihr Gutes haben. Wer erinnerte sich nicht zunächst noch der hohen Freude, die er als Schüler über die durch glückliche Combinationen aufgefundene Lösung einer einzeln dastehenden Aufgabe empfunden? Doch hier spricht noch ein anderer Umstand mit. Bietet uns das praktische Leben, wo es uns mathematische Kenntnisse abnöthigt, Aufgabensysteme? Nein, es fordert hie und da immer nur die Lösung einer isolirt dastehenden Aufgabe. Aber für das praktische Leben sollen und müssen wir doch auch Vorbilden, deshalb müssen wir auch die Kräfte unserer Schüler im freien Schaffen und nicht blos im Fortbauen auf gegebener Unterlage üben, und können und wollen daher Aufgabensammlungen im ersteren Sinne nicht gerade wegwerfen. Möchte auch die vorliegende den von uns beabsichtigten Zweck erfüllen und namentlich dazu beitragen, dass Jacobi's Uebersetzung der van Swinden'schen Geometrie immer noch mehr bekannt und gewürdigt werde. Dass diess noch nicht in der verdienten Weise geschehen ist, dafür spricht die Thatsache, dass z. B. in Grunert's Archiv für Mathematik und Physik eine Menge Aufgaben aus den Anhängen genannter Schrift als neu erfundene hingestellt worden sind.

Schliesslich kann ich nicht umhin, der wackeren Verlagshandlung für die so überaus geschmackvolle und splendide Ausstattung des Buchs meinen innigsten Dank zu sagen. Unerwähnt kann ich hierbei auch nicht lassen, dass drei meiner Schüler, die Primaner an hiesiger Realschule, Robert Herhudt aus Czersk, Wilhelm Werner aus Kösen und Justus Heinze aus Düben durch fleissige Durchsicht der Correcturbogen sich um die Correctheit der Schrift ein anzuerkennendes Verdienst erworben haben.

Halle, am 1. Februar 1847.

August Wiegand.

I n h a l t.

	Seite.
<i>Erster Abschnitt.</i> Ueber Parallellinien, Dreiecke und Vierecke.	
I. Lehrsätze	1—49
II. Aufgaben	49—64
<i>Zweiter Abschnitt.</i> Von dem Inhalte geradliniger Figuren.	
I. Lehrsätze	65—108
II. Aufgaben	108—119
<i>Dritter Abschnitt.</i> Vermischte Aufgaben mit Auflösungen, aber ohne Beweise	121—124

Erster Abschnitt.

Ueber Parallellinien, Dreiecke und Vierecke.

I. Lehrsätze.

1. Die aus den Endpunkten der Grundlinie eines gleichschenkligen Dreiecks auf die Schenkel oder deren Verlängerungen gefällten Perpendikel sind von gleicher Länge.

Beweis. Ist BC die Grundlinie des gleichschenkligen Dreiecks ABC und sind BD und CE die betreffenden Perpendikel, so ist $\triangle BCD \cong \triangle CBE$, weil $BC = CB$, $\angle BCD = \angle CBE$ als Winkel an der Grundlinie im gleichschenkligen Dreiecke und $\angle BDC = \angle CEB$ als rechte Winkel sind. In congruenten Dreiecken sind die gleich liegenden Stücke gleich, folglich $BD = CE$, w. z. b. w.

Zusätze. a) Je nachdem der Winkel an der Spitze eines gleichschenkligen Dreiecks ein spitzer oder stumpfer ist, je nachdem fallen die Fusspunkte der Perpendikel auf die Schenkel selbst oder deren Verlängerungen.

b) Im gleichschenklig-rechtwinkligen Dreiecke fallen die Perpendikel mit den Katheten zusammen.

c) Im gleichseitigen Dreiecke sind die drei Höhen einander gleich.

2. Wenn in einem Dreiecke zwei Höhen gleich sind, so sind auch ihre zugehörigen Grundlinien gleich. (Umkehrung von 1.)

Beweis. Denken wir uns dieselbe Figur, wie in 1, so sind wieder die Dreiecke BCD und CBE congruent, weil $CB = BC$, $CE = BD$ und die rechten Winkel gleich sind. Hieraus folgt, dass $\angle CBE = \angle BCD$ und hieraus $AC = AB$, w. z. b. w.

Zusatz. Sind die Höhen eines Dreiecks gleich, so ist das Dreieck ein gleichseitiges.

3. Wenn man auf den Seiten eines gleichseitigen Dreiecks von den Winkelspitzen aus beliebige, aber gleiche Stücke gleichmässig abschneidet und diese Durchschnittspunkte unter einander verbindet; so ist das entstandene Dreieck ebenfalls gleichseitig.

Beweis. Schneidet man im gleichseitigen ΔABC auf AB , BC , CA bezüglich von A , B und C aus die Stücke $AA' = BB' = CC'$ ab und verbindet A' , B' und C' unter einander, so soll $\Delta A'B'C'$ gleichseitig sein. Da die von den gleichen Seiten des Urdreiecks abgeschnittenen Stücke gleich sind, so sind es auch die übrig bleibenden Stücke, $A'B = B'C = C'A$, folglich sind in den Dreiecken $A'BB'$, $B'CC'$, $C'AA'$ zwei Seiten und der eingeschlossene Winkel gleich, folglich auch die dritten Seiten, $A'B' = B'C' = C'A'$, w. z. b. w.

Zusätze. a) In Bezug auf die Länge der von den Seiten abgeschnittenen gleichen Stücke findet keine Beschränkung statt, sie können auch grösser als die Seiten sein, d. h. die Abtragungspunkte können auch auf die Verlängerungen der Seiten fallen.

b) Der Satz bleibt auch noch richtig, wenn man gleich auf die Verlängerungen gleiche Stücke in demselben Sinne abträgt.

c) Auf das gleichschenklige Dreieck lässt sich dieser Satz nicht anwenden.

4. Zwei Winkel sind gleich, wenn die Schenkel des einen einzeln den Schenkeln des andern parallel sind, und beide Paare dieser parallelen Schenkel zugleich entweder nach derselben oder nach entgegengesetzten Richtungen vom Scheitel aus fortgehen.

Beweis. Zieht man durch die Scheitel der Winkel eine Gerade, so entstehen im ersten Falle zwei Paar correspondirender Winkel, im zweiten zwei Paare Wechselwinkel. Durch Subtraction kommt man in beiden Fällen auf die Gleichheit der von den gegebenen Linien gebildeten Winkel.

Zusatz. Läuft das eine Paar der parallelen Schenkel nach einerlei, das andere hingegen nach entgegengesetzter Richtung, so ergänzen die Winkel einander zu zwei Rechten.

Beweis. Ergiebt sich sofort, wenn man einen Schenkel eines Winkels über den Scheitel hinaus verlängert und den Hauptsatz anwendet.

5. Wenn man einen Schenkel eines gleichschenkligen Dreiecks über die Spitze hinaus verlängert und den so entstandenen Aussenwinkel halbirt, so ist diese Halbirende der Grundlinie des Dreiecks parallel.

Beweis. Der Aussenwinkel ist gleich der Summe der beiden Dreieckswinkel, welche nicht Nebenwinkel von ihm sind, (I. §. 59.) folglich gleich der Summe der Winkel an der Grundlinie, seine Hälfte ist also gleich einem der letztern und es entstehen also zwei gleiche correspondirende und auch zwei gleiche Wechselwinkel, woraus die Richtigkeit des Satzes unmittelbar sich ergibt. (I. §. 49.)

6. Ist die einen Aussenwinkel eines Dreiecks halbirende Gerade parallel mit einer der Dreiecksseiten, so sind die beiden andern Dreiecksseiten von gleicher Grösse.

Beweis. Die Hälften des Aussenwinkels sind den Winkeln an der Grundlinie des Dreiecks bezüglich als Wechsel- oder correspondirende Winkel zwischen Parallelen gleich.

7. Zieht man durch die Spitze eines gleichschenkligen Dreiecks eine Gerade parallel mit der Grundlinie, so halbirt diese die an der Spitze liegenden Aussenwinkel.

Beweis. Die oberen Stücke der Aussenwinkel sind den Winkeln an der Grundlinie bezüglich als correspondirende, die unteren als Wechselwinkel gleich, folglich sind die Stücke jedes Winkels einander selbst gleich.

Zusatz. Die beiden letzten Sätze sind Umkehrungen zu 5.

8. Halbirt man die Winkel eines Nebenwinkel-paares, so stehen die halbirenden auf einander senkrecht.

Beweis. Die Summe der Nebenwinkel ist gleich zwei Rechten, folglich die Summe ihrer Hälften gleich einem Rechten.

Zusatz. Zieht man durch den Scheitel eines rechten Winkels zwischen seinen Schenkeln eine Gerade und trägt die entstandenen Stücke des Rechten an denselben nach aussen noch einmal an, so bilden die zuletzt gezogenen Schenkel einen gestreckten Winkel (Umkehrung).

9. Zwei gleichseitige Dreiecke sind congruent, wenn eine Höhe des einen einer Höhe des andern gleich ist.

Beweis. Man ziehe in jedem Dreieck eine Höhe, dann sind die entstandenen Dreiecke in beiden Urdreiecken congruent. Ausser den Höhen sind nämlich noch die rechten Winkel und die Winkel des ursprünglichen Dreiecks (jeder ist $= 60^\circ$) einander gleich. Hieraus folgt die Gleichheit der Seiten der gegebenen gleichseitigen Dreiecke.

10. Wenn man auf einem Schenkel (AN) eines beliebigen Winkels (MAN) einen beliebigen Punkt (C) annimmt und in diesem sowohl ein Loth (CL) auf den Schenkel (AN) errichtet, als auch auf den andern Schenkel (AM) ein Loth (CK) fällt und den von beiden Lothen eingeschlossenen Winkel (durch CB) halbirt, so ist das Dreieck (ABC), welches die Halbirungslinie vom gegebenen Winkel abschneidet ein gleichschenkeliges, das in der Spitze des gegebenen Winkels seine Spitze hat.

Beweis. Es ist $ACB + BCL = KBC + BCK = R$

$BCL = KCB$ nach Voraussetzung

folglich $ACB = KBC$.

Zusatz. Der Satz behält auch seine Richtigkeit, wenn der Winkel ein rechter oder stumpfer ist.

11. Zwei Parallelogramme sind congruent, wenn zwei an einander anliegende Seiten und der von ihnen eingeschlossene Winkel einzeln in beiden gleich sind

Beweis. Da zwei Seiten und der eingeschlossene Winkel gleich sind, so lassen sich die Parallelogramme so aufeinander legen, dass diese Stücke sich decken. Es ist mithin nur noch zu beweisen übrig, dass die beiden noch übrigen Seitenpaare ebenfalls zusammenfallen müssen. Wäre dies nicht der Fall, so würde man auf die Ungereimtheit kommen, dass sich durch einen Punkt außerhalb einer Geraden zwei Parallelen mit dieser ziehen liessen.

12. Wenn man die Mittelpunkte der Seiten eines Dreiecks durch Gerade verbindet, so entstehen vier congruente Dreiecke.

ABC sei das gegebene Dreieck, A', B', C' seien bezüglich die Mittelpunkte der Seiten AB , BC und CA , dann soll $\triangle AA'C' \cong \triangle A'BB' \cong \triangle B'CC' \cong \triangle A'B'C'$ sein.

Beweis. Der Satz wird offenbar bewiesen sein, wenn wir vorläufig annehmen, es seien z. B. durch den Mittelpunkt A' die Linien $A'B' \parallel AC$, $A'C' \parallel BC$ gezogen und B' mit C' verbunden, ferner zeigen, dass die hierdurch gebildeten Dreiecke unter sich congruent sind und zuletzt nachweisen, dass B' und C' die beiden anderen Seitenmittelpunkte seien. Aus der so eben gemachten Annahme folgt, dass $A'B'CC'$ ein $\parallel$ gr, folglich $\triangle A'B'C' \cong \triangle B'CC'$ ist. Ferner ist $\triangle A'BB' \cong \triangle AA'C'$, denn $AA' = A'B$ nach Voraussetzung, $AA'C' = A'BB'$ und $C'AA' = B'A'B$ als correspondirende Winkel. Hieraus folgt endlich $A'C' = BB'$, und da noch $A'B'$ sich selbst gleich und $C'A'B' = A'B'B$ als Wechselwinkel, so ist auch $A'BB' \cong A'B'C'$, folglich alle vier Dreiecke congruent. Aus der Congruenz folgt aber gleichzeitig, dass $BB' = B'C$ und $CC' = C'A$ ist, folglich sind B' und C' in der That die Mittelpunkte der beiden andern Dreiecksseiten und der Satz ist also erwiesen.

Zusatz. Die Verbindungslinie der Halbirungspunkte zweier Seiten im Dreieck ist der dritten Seite parallel.

13. Wenn in einem gleichschenkligen Dreiecke irgend einer der drei Winkel $\frac{2}{3}R$ beträgt, so ist das Dreieck gleichseitig.

Beweis. Ist der Winkel an der Spitze $= \frac{2}{3}R$, so müssen, da alle Winkel $2R$ betragen, die Winkel an der Grundlinie $\frac{4}{3}R$, also jeder auch $\frac{2}{3}R$ betragen. Ist aber ein Winkel an der Grund-

linie, und also auch der andere $\frac{2}{3}r$, so bleiben für den dritten Winkel ebenfalls $\frac{2}{3}r$ von $2r$ übrig.

14. Theilt man jede der Seiten eines gleichseitigen Dreiecks in drei gleiche Theile und verbindet von diesen Theilpunkten je zwei solche, die einer und derselben Winkelspitze zunächst liegen, so entsteht ein Sechseck, das regelmässig ist, d. h. in welchem alle Seiten sowohl als alle Winkel einander gleich sind.

Beweis. Bezeichnen wir die Theilungspunkte auf AB von A aus durch D und E , auf BC von B aus mit F und G , auf CA von C aus mit H und I , so ergibt sich zunächst, dass $\triangle ADI \cong \triangle EBF \cong \triangle GCH$, denn es sind in allen diesen Dreiecken zwei Seiten und die eingeschlossenen Winkel bezüglich gleich. Nun sind aber diese kleinen Dreiecke ebenfalls gleichseitig, denn es sind die bei A , B und C liegenden Stücke gleich, also die Dreiecke zunächst gleichschenkelig, da aber $A = B = C = \frac{2}{3}r$, sind sie nach 13. gleichseitig. Es sind somit die gezogenen Verbindungslinien ebenfalls gleich dem dritten Theile einer Dreiecksseite und folglich das Sechseck gleichseitig. Dass es auch gleichwinklig ist, folgt daraus, dass dessen Winkel sämtlich Nebenwinkel von $\frac{2}{3}r$ sind.

Zusatz. Das entstandene Sechseck ist Zweidrittheil vom ursprünglichen Dreiecke.

Beweis. Halbirt man die Sechseckswinkel bei I und D und verbindet den Durchschnitt (K) beider halbirenden mit den übrigen Winkelspitzen des Rechtecks, so lässt sich leicht zeigen, dass die entstehenden 6 Dreiecke sämtlich unter sich und zugleich den dreien in Wegfall kommenden kleinen Dreiecken bei A , B und C congruent sind. Da nun das Urdreieck aus 9 congruenten Dreiecken besteht und 6 davon aufs Sechseck kommen, so beträgt dieses $\frac{6}{9} = \frac{2}{3}$ vom Urdreieck,

15. Zwei Quadrate sind congruent, wenn eine Diagonale des einen einer Diagonale des andern gleich ist.

Beweis. Die Diagonalen theilen die Quadrate in gleich-

schenklig-rechtwinklige Dreiecke. Diese sind aber offenbar congruent, wenn die Hypotenusen gleich sind. Hieraus folgt aber die Gleichheit der Quadratseiten und die Congruenz der ganzen Quadrate. (Vergl. 11.)

16. In jedem schiefwinkligen Parallelogramme ist die Diagonale, welche die Scheitel der beiden spitzen Winkel verbindet, grösser als die andere.

Beweis. Es sei ABCD das gegebene $\parallel$ gr, B und D seien die spitzen Winkel. Vergleichen wir die beiden Dreiecke BAD und CAD, so ist $AB = DC$, $AD = AD$, Winkel $BAD > ADC$. Wenn aber in zwei Dreiecken zwei Seiten gleich, die eingeschlossenen Winkel aber ungleich sind, so sind auch die dritten Seiten ungleich und zwar liegt dem grössern Winkel die grössere Seite gegenüber (I. §. 71.), es ist somit $BD > AC$, w. z. b. w.

Zusatz. Ist in einem Parallelogramme eine Diagonale grösser als die zweite, so verbindet die erstere die Scheitel der spitzen Winkel des Parallelogramms.

Beweis. Auf ähnliche Weise ergibt sich die Richtigkeit der Umkehrung des vorigen Satzes durch Anwendung des Satzes, wenn in zwei Dreiecken zwei Seiten gleich, die dritte aber ungleich sind, so liegt der grössern Seite auch der grössere Winkel gegenüber (I. §. 72.)

17. Wenn man jede von zwei Seiten eines Dreiecks über ihren gemeinschaftlichen Endpunkt hinaus um die Grösse der andern verlängert und die Endpunkte dieser Verlängerungen mit den Endpunkten der dritten Dreiecksseite verbindet, so sind diese beiden verbindenden Geraden stets einander parallel.

Beweis. Es sei ABC das gegebene Dreieck, AC werde über A hinaus um $AC' = AB$ und AB über A hinaus um $AB' = AC$ verlängert, B'C und c'B gezogen, dann sind ABC' und AB'c gleichschenklige Dreiecke, in denen die Winkel an der Spitze und folglich auch an der Grundlinie gleich sind. Es ist also $c'BA = BB'c$, folglich wegen der Gleichheit der Wechselwinkel $c'B \parallel B'c$, w. z. b. w.

Zusätze. a) Beim gleichseitigen und beim gleichschenkligen Dreieck ist, wenn die Schenkel über die Spitze verlängert wer-

den, die Verbindungslinie der Abtragungspunkte der dritten Seite parallel.

b) Wenn man die Seiten um ihre eigene Grösse verlängert, so sind beide Paare von Linien parallel, d. h. das entstandene Viereck ist ein Parallelogramm.

18. Zwei gerade Linien, welche von einem Punkte aus nach entgegengesetzten Seiten auslaufen und beide einer dritten Geraden parallel sind, bilden eine einzige gerade Linie.

Beweis. Zieht man durch den gegebenen Punkt eine beliebige Gerade an die dritte Linie, so wird der eine Winkel am Punkte einem Winkel an der dritten Linie als Wechselwinkel gleich sein, dieser aber mit dem andern Winkel am Punkte, da beide innere Winkel an einer Seite der schneidenden Linie sind, zwei Rechte betragen. Hieraus folgt aber, dass auch beide Winkel am Punkte zwei Rechte betragen, ihre nicht gemeinschaftlichen Schenkel also einen Gestreckten oder eine gerade Linie bilden.

19. Wenn man auf jeder von zwei oder mehreren Geraden ein Loth errichtet und diese Lothe alle unter einander parallel sind, so bilden jene nöthigenfalls verlängerten Geraden entweder eine einzige gerade Linie, oder sie sind auch unter einander parallel.

Beweis. Wenn man eins der Lothe gehörig verlängert, so muss es jede der gehörig verlängerten Geraden durchschneiden. Denn wäre dies mit einer Geraden nicht der Fall, so müsste diese sämtlichen Lothen und also auch dem sie schneidenden parallel sein. Da nun das bis zum Durchschnitt mit allen Geraden verlängerte Loth sämtlichen Lothen nach der Voraussetzung parallel ist, so muss es mit jeder Geraden einen rechten Winkel bilden, sämtliche Gerade also als Lothe auf einer einzigen Geraden parallel sein. Eine einzige Gerade werden sie aber nach 18. bilden, wenn jede mit irgend einer nach gehöriger Verlängerung einen Punkt gemein hat.

Zusatz. Die Umkehrung dieses Satzes: „Lothe auf parallelen Geraden sind wieder parallel“ fällt mit dem vorigen Satze zusammen.

20. Errichtet man auf jedem Schenkel eines Winkels ein Loth, so schneiden dieselben jederzeit einander.

Beweis. Schnitten sie einander nicht, so müssten sie, dann aber nach 19. auch die Winkelschenkel, parallel sein, was ungeeignet ist.

21. Die drei auf den Seiten eines Dreiecks in ihren Halbierungspunkten errichteten Lothe schneiden einander bei hinreichender Verlängerung stets in einem Punkte.

Beweis. Es seien (Fig. 1.) D und E die Mittelpunkte der Seiten AB und BC im $\triangle ABC$; $DG \perp AB$, $EG \perp BC$ gezogen und GF auf AC als Loth gefällt. Der Satz ist offenbar erwiesen, wenn sich zeigen lässt, dass F Mittelpunkt von AC ist. Zu dem Ende ziehe man AG , GB und GC ; dann ist $\triangle ADG \cong \triangle BDG$ und $\triangle BGE \cong \triangle CGE$ (zwei Seiten und der eingeschlossene Winkel sind gleich). Hieraus folgt $AG = BG = CG$. Nun lässt sich auch $\triangle AGF \cong \triangle CGF$ erweisen (zwei Seiten und der Gegenwinkel der grössern sind gleich), woraus $AF = CF$ folgt, was nur noch zu zeigen war.

Zusätze. a) Der Durchschnitt der drei vorerwähnten Lothe liegt innerhalb, im Umfange oder ausserhalb des Dreiecks, je nachdem letzteres spitzwinklig, rechtwinklig oder stumpfwinklig ist.

b) Der Durchschnittspunkt der drei Lothe hat von den Winkelspitzen des Dreiecks gleiche Abstände.

22. Die drei Höhenperpendikel jedes Dreiecks schneiden einander in einem einzigen Punkte.

Beweis. Es seien im $\triangle ABC$ (Fig. 2.) AD , BE , CF die Höhen, man ziehe durch A, B, C bezüglich $KH \parallel BC$, $HI \parallel AC$, $IK \parallel AB$, dann sind die Vierecke $AHBC$ und $ABCK$ Parallelogramme, und deshalb ist $AH = BC = KA$, folglich A Mittelpunkt der Seite KH im $\triangle HIK$. Ganz auf ähnliche Weise überzeugt man sich, dass B und C bezüglich die Mittelpunkte der Seiten HI und IK sind. Nun müssen die Höhen des Dreiecks ABC offenbar auf den Seiten des Dreiecks HIK ebenfalls senkrecht stehen, weil die Seiten des einen denen des andern parallel sind. Da die Höhen aber in den Halbierungspunk-

ten der Seiten des $\triangle HIK$ senkrecht stehen, so müssen sie einander nach 21. in einem Punkte schneiden.

23. Wenn man eine von zwei ungleichen Dreiecksseiten über den gemeinschaftlichen Durchschnittspunkt beider verlängert und den so entstandenen Aussenwinkel halbirt, so ist diese Linie niemals mit der dritten Dreiecksseite parallel, sondern schneidet stets die über die kleinere der beiden ersten hinausgehende Verlängerung derselben.

Beweis. Es sei (Fig. 3) im $\triangle ABC$ die Seite $AC < AB$, so ist auch $\delta < \gamma$. Ist nun AE die den Aussenwinkel Halbirende, so ist $2\alpha = \gamma + \delta$, und weil $\delta < \gamma$, muss $\alpha > \delta$ sein. Nun ist $\beta + \gamma + \delta = 2R$, folglich $\alpha + \beta + \gamma > 2R$, folglich müssen, weil die innern Winkel auf einer Seite der Schneidenden mehr als zwei Rechte betragen, die Geraden AE und BC einander auf der entgegengesetzten Seite (in F) schneiden, w. z. b. w.

24. Wenn man auf den Seiten eines beliebigen Parallelogramms von den Winkelspitzen aus gleichmässig Stücke von beliebiger, aber gleicher Länge abschneidet, so ist das durch Verbindung dieser Durchschnittspunkte entstandene Viereck gleichfalls ein Parallelogramm.

Beweis. In Fig. 4. ist $\triangle EBF \cong \triangle DHG$ und ebenso $\triangle AEH \cong \triangle FCG$, denn zwei Seiten und der eingeschlossene Winkel sind gleich. Hieraus folgt $EF = HG$ und $HE = GF$ und hieraus, dass $HEFG$ ein $\parallel$ gr ist.

Zusatz. Der Satz bleibt auch richtig, wenn die abgetragenen Stücke länger als die Seiten sind, die Abtragungspunkte also auf die Verlängerungen der Seiten fallen.

25. Alle auf die im vorigen Satze angegebene Weise entstandenen Parallelogramme haben mit dem Urparallelogramme einen gemeinschaftlichen Diagonalen-Durchschnittspunkt.

Beweis. Es ist Fig. 4. nur zu zeigen, dass EG und BD

einander in i halbiren. Dies folgt aber aus der Congruenz der Dreiecke EBI und GDI . Diese Dreiecke sind nämlich congruent, weil sie eine Seite ($EB = DG$) und zwei Winkel (gleiche Wechselwinkel) gleich haben. Hieraus folgt aber $BI = DI$ und $EI = GI$. Da nun die Diagonalen jedes $\parallel$ grs einander halbiren, so müssen sämtliche Diagonalen durch den Punkt i gehen, w. z. b. w.

26. Wenn man die Halbirungspunkte der Seiten eines beliebigen Rhombus unter einander verbindet, so ist das so entstandene Parallelogramm stets rechtwinklig.

Beweis. In Fig. 5. ist

$$\begin{array}{rcl} B + 2\beta + C + 2\alpha & = & 4R \\ B + C & = & 2R \\ \hline 2\beta + 2\alpha & = & 2R \\ \beta + \alpha & = & R, \end{array}$$

folglich auch $EFG = R$. (Folgt auch aus der Gleichheit der Diagonalen.)

27. Die drei geraden Linien, welche die Winkel eines beliebigen Dreiecks halbiren, haben einen gemeinschaftlichen Durchschnittspunkt.

Beweis. Man halbire (Fig. 6.) die Winkel bei A und C bezüglich durch AD und CD und verbinde den Durchschnittspunkt beider mit B . Lässt sich nun zeigen, dass DB den Winkel bei B halbirt, so ist der Satz natürlich erwiesen. Fällt man aber $DE \perp AB$, $DG \perp AC$ und $DF \perp BC$, so ist $\triangle AED \cong \triangle AGD$ (eine Seite und zwei Winkel gleich), ebenso $\triangle DGC \cong \triangle DFC$. Hieraus folgt $DE = GD = DF$, und hieraus, dass $\triangle DEB \cong \triangle DFB$ (zwei Seiten und der Gegenwinkel der grössern gleich), also auch $EBD = DBF$ ist.

Zusatz. Der Punkt D ist von den Seiten des Dreiecks gleich weit entfernt.

28. Wenn man eine der Seiten eines Dreiecks über beide Endpunkte hinaus verlängert und nicht nur beide so entstandene Aussenwinkel, sondern auch den der verlängerten Seite gegenüber liegenden innern Winkel des Dreiecks halbirt, so haben diese drei

Halbirenden bei hinreichender Verlängerung gleichfalls einen gemeinschaftlichen Durchschnittspunkt.

Beweis. Man verbinde (Fig. 7). den Schneidepunkt h der Halbirenden EH und GH mit B , und beweise, dass HB den Winkel bei B halbt. Zu diesem Ende fälle man von h die Lothe HI , HK und HL bezüglich auf die drei Seiten resp. deren Verlängerungen, dann ergeben sich ganz ähnlich wie in 27. $\triangle HIC \cong \triangle HKC$, $\triangle HAL \cong \triangle HAI$, hieraus $HL = HI = HK$ und hieraus $\triangle HLB \cong \triangle HKB$ und folglich $HBL = HBK$.

Zusätze. a) Der Durchschnittspunkt dieser drei Geraden ist von allen Dreiecksseiten ebenfalls gleich weit entfernt.

b) Bei jedem Dreiecke lassen sich ausserhalb desselben drei solcher Punkte finden, die gleiche Entfernung von den Seiten haben.

c) Fällt man von allen diesen Punkten und dem innerhalb Lothe auf die Seiten oder deren Verlängerungen, so entstehen zwölf Paare congruenter Dreiecke.

29 a. Fällt man aus dem gemeinschaftlichen Durchschnittspunkte der die Winkel eines Dreiecks halbirende Linien auf die Dreiecksseite Senkrechte, so ist von den Winkeln, welche dieselben mit den nach denselben Dreiecksseiten gezogenen Halbirenden bilden, einer so gross als die beiden andern zusammen. $[EGI = KGF + HGD]$.

Beweis. Bezeichnen wir (Fig. 8.) die Winkel des Dreiecks durch A, B, C , so ist, wie leicht zu ersehen,

$$\alpha + R = A + \frac{B}{2};$$

$$\beta + R = A + \frac{C}{2};$$

$$\gamma + R = B + \frac{A}{2};$$

folglich $\beta + \gamma + 2R = A + \frac{A}{2} + B + \frac{C}{2}$

$$R = \frac{A}{2} + \frac{B}{2} + \frac{C}{2}$$

$$\beta + \gamma + R = A + \frac{B}{2};$$

folglich $\alpha = \beta + \gamma$, w. z. b. w.

Zusätze. a) Von den drei genannten Winkeln ist derjenige gleich der Summe der beiden andern, welcher an der Halbierungslinie liegt, welche durch den Zusammenstossungspunkt der grössten und kleinsten Dreiecksseite geht.

b) Der Hauptsatz hat auch noch Wahrheit beim gleichschenkligen und beim gleichseitigen Dreiecke. Beim erstern erhält man nämlich $\alpha = \alpha + 0$ und bei letzterem $0 = 0 + 0$.

c) Der Hauptsatz bleibt auch richtig, wenn man einen Dreieckswinkel und die durch beiderseitige Verlängerung der dritten Seite entstandenen Aussenwinkel halbirt und die entsprechende Construction macht. (Der Beweis ist dem vorigen ganz analog.)

29 b. Wenn man von einem der Endpunkte (B Fig. 9.) der Grundlinie (BC) eines gleichschenkligen Dreiecks (ABC) nach einem beliebigen Punkte (D) des Gegenschenkels (AC) eine gerade Linie (BD) zieht, auf diesem (verlängerten) Schenkel von diesem Punkte (D) aus nach der Grundlinie hin ein Stück (DE) abschneidet, welches gleich ist der vorhergenannten Linie (BD) und endlich den so erhaltenen Durchschnittspunkt (E) mit eben jenem Endpunkte (B) der Grundlinie verbindet, so ist der Winkel (EBC), welchen diese letztere Linie mit der Grundlinie bildet, stets halb so gross als derjenige (ABD), welchen die zuerst gezogene Linie mit dem Schenkel (BA) bildet, der mit ihr von demselben Endpunkte der Grundlinie ausläuft.

Beweis. $\alpha + \beta = \delta$ nach Voraussetzung

$= \varepsilon + \gamma$ als Aussenwinkel

$\beta + \gamma = \varepsilon$ ebenfalls nach Voraussetzung

$\alpha - \gamma = \gamma$ nach Subtraction

oder $\alpha = 2\gamma$, w. z. b. w.

30. Wenn man auf der grössern (AE Fig 9.) von zwei ungleichen Dreiecksseiten (AE, AB) von ihrem gemeinschaftlichen Endpunkte (A) aus ein Stück (AC) abschneidet, welches gleich ist der kleinern (AB) und diesen Durchschnittspunkt (C) mit der Spitze des Gegenwinkels (B) verbindet, so ist der Winkel (EBC), welchen diese Linie mit der dritten Dreiecksseite (BE) bildet, gleich dem halben Unterschiede der beiden

Dreieckswinkel ($\angle ABE$ und $\angle AEB$), welche unsern in Rede stehenden Seiten gegenüber liegen, also $\frac{1}{2}(\angle ABC - \angle AEB)$.

Beweis.

$$\begin{aligned} \angle ABC &= \angle ACB \\ &= \angle CEB + \angle EBC \\ \angle EBC &= \angle EBC \\ \hline \angle ABE &= \angle CEB + 2\angle EBC \text{ durch Addition,} \\ \text{oder } \angle ABE - \angle CEB &= 2\angle EBC, \\ \text{oder } \frac{1}{2}(\angle ABE - \angle AEB) &= \angle EBC, \text{ w. z. b. w.} \end{aligned}$$

31. Wenn man sowohl von den beiden Endpunkten als auch von dem Halbierungspunkte einer beliebigen geraden Linie nach einer beliebigen andern drei Linien zieht, die unter einander parallel sind, so ist die mittlere halb so gross, als die beiden äusseren zusammen.

Beweis. Wenn AB in c (Fig. 10) halbiert und

$AF \parallel CE \parallel BD$ an DF gezogen ist,
so soll $CE = \frac{1}{2}(AF + BD)$ oder
 $b = \frac{1}{2}(a + c)$ sein.

Man ziehe $GH \parallel AB$, verlängere BD bis H , dann ist $\triangle GEF \cong \triangle DEH$ (eine Seite und zwei Winkel gleich), folglich $GF = DH = x$, und also

$$\begin{aligned} a - x &= b \\ c + x &= b \\ \hline a + c &= 2b \\ \frac{1}{2}(a + c) &= b, \text{ w. z. b. w.} \end{aligned}$$

Zusatz. Wenn man die Halbierungspunkte zweier Dreiecksseiten verbindet, so ist diese Verbindungslinie gleich der Hälfte der dritten Seite. (Die dritte parallele Seite ist hier Null.)

32. Zieht man eine Gerade durch den Halbierungspunkt (D Fig. 11) der Grundlinie eines gleichschenkligen Dreiecks und verlängert sie so weit, dass sie den einen Schenkel (AC) selbst und des andern Verlängerung schneidet, so ist das ausserhalb des Dreiecks liegende Stück (DF) derselben stets grösser als das andere (DE).

Beweis. Man ziehe $BG \parallel AC$, dann ist $\triangle EDC \cong \triangle BDG$ (eine Seite und zwei Winkel gleich), folglich $ED = DG$ und also $ED < DF$, w. z. b. w. (Dass G zwischen D und F fallen muss, folgt daraus, dass DBG ein spitzer Winkel sein muss.)

33. Verbindet man die Winkelspitze eines Dreiecks, von welcher zwei ungleiche Seiten ausgehen, mit dem Mittelpunkte der Gegenseite, so bilden diese beiden Linien in diesem Punkte stets schiefe Winkel, und zwar ist der stumpfe derjenige, welcher der grössern der beiden genannten ungleichen Dreiecksseiten gegenüber liegt.

Beweis. Folgt aus dem Satze: Wenn in zwei Dreiecken zwei Seiten gleich, die dritten aber ungleich sind, so sind auch die Gegenwinkel der letztern ungleich, und zwar liegt die grössere Seite dem grössern Winkel gegenüber. (I. §. 72.)

34. Macht die Verbindungslinie einer Winkelspitze im Dreieck mit der Mitte der Gegenseite mit letzterer schiefe Winkel, so liegt dem grössern von beiden die grössere Dreiecksseite gegenüber. (Umkehrung von 33.)

Beweis. Folgt aus dem Satze: Sind in zwei Dreiecken zwei Seiten gleich, die eingeschlossenen Winkel aber ungleich, so sind auch die dritten Seiten ungleich, und zwar liegt dem grössern Winkel die grössere Seite gegenüber. (I. §. 71.)

35. Der Satz: „Das aus der Spitze eines gleichschenkligen Dreiecks auf die Grundlinie gefällte Loth halbiert sowohl die letztere als auch den Winkel an der Spitze“ erlaubt folgende Umkehrungen:

a) Im gleichschenkligen Dreieck steht die Halbirungslinie des Winkels an der Spitze auf der Grundlinie senkrecht und halbiert dieselbe.

b) Im gleichschenkligen Dreieck steht die Verbindungslinie der Spitze mit dem Halbirungspunkte der Grundlinie auf letzterer senkrecht und halbiert den Winkel an der Spitze.

c) Das in der Mitte der Grundlinie eines gleichschenkligen Dreiecks auf diese errichtete Loth geht durch die Spitze und halbt den Winkel an derselben.

d) Wenn die Höhe eines Dreiecks die Grundlinie halbt, so ist das Dreieck gleichschenkligh in Bezug auf diese Grundlinie.

e) Wenn die Höhe eines Dreiecks den Winkel an der Spitze halbt, so ist das Dreieck gleichschenkligh in Bezug auf diese Spitze.

f) Wenn die Halbirungslinie eines Winkels im Dreieck die Gegenseite halbt, so ist das Dreieck gleichschenkligh in Bezug auf jene Gegenseite als Grundlinie, und jene Verbindungslinie ist dessen Höhe.

g) Wenn das in der Mitte einer Dreiecksseite errichtete Loth durch die gegenüberliegende Winkelspitze geht, so ist das Dreieck gleichschenkligh in Bezug auf jene Winkelspitze.

h) Wenn die Verbindungslinie der Winkelspitze eines Dreiecks mit der Mitte der Gegenseite den Winkel an der Spitze halbt, so ist das Dreieck an jener Spitze gleichschenkligh.

i) Wenn die Halbirungslinie eines Winkels in einem Dreieck auf der Gegenseite senkrecht steht, so ist das Dreieck an jenem Winkel gleichschenkligh.

36. Ein Viereck ist nicht nothwendig ein Parallelogramm, wenn das eine Paar seiner Gegenseiten parallel und das andere gleich ist.

Beispiel. Zieht man durch die Schenkel eines gleichschenkligen Dreiecks eine Parallele mit der Grundlinie, so hat das unten abgeschnittene Viereck offenbar die obigen Eigenschaften, doch ist es kein Parallelogramm, weil sich die gleichen Seiten in der Spitze des Dreiecks schneiden.

Zusatz. Tritt zu den obigen Bedingungen noch die hinzu, dass die gleichen Seiten nach innen mit einer Seite rechte oder verschiedene Winkel machen, so muss das Viereck nothwendig ein Parallelogramm sein.

37. Erklärung. Ein Viereck, in welchem ein paar Gegenseiten parallel, das andere Paar gleich und welches dennoch kein Parallelogramm ist, soll Antiparallelogramm heissen.

Anmerkung. Antiparallel heisst eine Linie (DC Fig. 12.) einer andern (AB), wenn Winkel $\angle CDE = \angle ABC$ und Winkel $\angle DCE = \angle BAD$ ist.

38. In jedem Antiparallelogramm sind die an jeder der parallelen Seiten liegenden Winkel gleich ($\angle BCE = \angle AEC$ Fig. 13.).

Beweis. Zieht man $BD \parallel AE$, so ergibt sich sofort, dass $\triangle BDC$ gleichschenkelig, und da $\angle BDC = \angle AEC$ als Wechselwinkel auch $\angle BCD = \angle AEC$ ist, w. z. b. w.

39. In jedem Antiparallelogramm sind die beiden Diagonalen einander gleich ($AC = BE$ Fig. 13.).

Beweis. Folgt aus der Congruenz der Dreiecke BCE und AEC .

40. In jedem Antiparallelogramm sind diejenigen Segmente der Diagonalen, die zwischen ihrem Durchschnittspunkte und den beiden Endpunkten einer der parallelen Seiten liegen, von gleicher Grösse. ($AF = BF$ Fig. 13.)

Beweis. Aus der Congruenz $\angle ABE \cong \angle ABC$ folgt Winkel $\angle ABE = \angle BAC$, und hieraus $AF = BF$.

41. In jedem Antiparallelogramm läuft die Gerade, welche die Halbierungspunkte der beiden nicht parallelen Seiten verbindet, mit den beiden andern Seiten parallel und ist halb so gross als diese zusammen. ($GH = \frac{1}{2}(AB + CE)$ Fig. 13.)

Beweis folgt aus 31.

42. Das Stück (IK Fig. 13.) der vorher bezeichneten Linie (GH), welches zwischen den beiden Diagonalen enthalten ist, ist halb so gross als der Ueberschuss der grössern von den parallelen Seiten über die kleinere. ($GH = \frac{1}{2}(CE - AB)$)

Beweis. Da $BI = EI$ (vgl. Beweis zu 12), so ist nach 31. Zus.

$$IH = \frac{1}{2}CE$$

$$KH = \frac{1}{2}AB$$

$$IH - KH = \frac{1}{2}CE - \frac{1}{2}AB,$$

$$IK = \frac{1}{2}(CE - AB), \text{ w. z. b. w.}$$

43. Wenn in einem Vierecke sowohl die beiden Diagonalen von gleicher Grösse als auch ein Paar Gegenseiten einander gleich sind, so ist das andere Paar der Gegenseiten parallel.

Beweis. Aus der Voraussetzung folgt, dass (Fig. 13.) $\triangle ABC \cong \triangle ABE$ und hieraus, dass Winkel $BAC = ABE$; ferner ist $\triangle BCE \cong \triangle ACE$, woraus Winkel $BEC = ACE$ folgt. Es sind somit $\triangle ABF$ und $\triangle FEC$ gleichschenklige Dreiecke, und da sie denselben Winkel an der Spitze haben, so haben sie auch gleiche Winkel an der Grundlinie, es ist deshalb Winkel $ABE = BEC$ (gleiche Wechselwinkel) und deshalb $AB \parallel EC$, w. z. b. w.

44. Sind in einem Vierecke die Diagonalen gleich und ein Paar der Gegenseiten parallel, so sind die beiden andern Gegenseiten von gleicher Grösse.

Beweis. Man fälle (Fig. 13.) noch $BL \perp EC$ und $AM \perp EC$, dann ist $\triangle EBL \cong \triangle ACM$ (zwei Seiten und der eingeschlossene Winkel gleich) und Winkel $BEL = ACM$. Hieraus folgt $\triangle ACE \cong \triangle BEC$ (derselbe Congruenzsatz), und hieraus $AE = BE$, w. z. b. w.

45. Wenn in einem Vierecke sowohl das eine als das andere Paar nicht gegenüberliegender Winkel einzeln gleich sind, (nämlich $AEC = BCE$ und $EAB = CBA$ Fig. 13.), so ist das Viereck ein Antiparallelogramm.

Beweis. Verlängert man EA und CB bis zum Durchschnitt, so muss $\triangle NEC$ sowohl, als $\triangle NAB$ gleichschenklige sein. Hieraus folgt aber sowohl $AE = BC$ (Gleiches von Gleichem subtrahirt) als auch $AB \parallel EC$ (gleiche Gegenwinkel).

46. Jedes Viereck ist ein Antiparallelogramm, wenn die beiden Segmentenpaare der Diagonalen, die zwischen ihrem gegenseitigen Durchschnittspunkte und zwischen den Endpunkten sowohl der einen als der andern von zwei Gegenseiten liegen, einzeln gleich sind.

Beweis. Ist (Fig. 13.) $AF = BF$ und $CF = EF$, so ist $\triangle ABF = \triangle FEC$ (gleichschenklige Dreiecke, bei gleichem Winkel an der Spitze), und deshalb $AB \parallel EC$. Dass $BC = AE$, folgt aus der Congruenz von $\triangle BFC$ und $\triangle AFE$.

47. Jedes Viereck ist ein Parallelogramm, in welchem die Diagonalen sich gegenseitig halbiren.

Beweis. Wenn (Fig. 14) $AE = EC$ und $BE = ED$, so ist $\angle AEB \cong \angle DEC$ und $\angle BEC \cong \angle AED$, folglich $AB \parallel DC$ und $BC \parallel AD$ (gleiche Wechselwinkel).

48. Jedes Parallelogramm, dessen Diagonalen gleich sind, ist gleichwinklig, also ein Rechteck.

Beweis. Angenommen, es wäre (Fig. 14.) $AC = BD$, so wäre $\angle ACD \cong \angle BDC$ (alle drei Seiten gleich), folglich $\angle ADC = \angle BCD = R$. Hieraus folgt aber auch, dass $\angle DAB = \angle ABC = R$, weil jeder mit einem der vorigen ein Paar innerer Winkel zwischen Parallelen bildet.

49. Jedes Parallelogramm, dessen Diagonalen auf einander senkrecht stehen, ist gleichseitig.

Beweis. Gesetzt die Winkel um E herum (Fig. 14.) wären Rechte, so wäre $\angle ABE \cong \angle BEC$ und $\angle AED \cong \angle CED$ (zwei Seiten und der eingeschlossene Winkel gleich). Hieraus folgt die Gleichheit der vier Seiten.

50. Gleichseitig ist auch jedes Parallelogramm, in welchem ein Paar Gegenwinkel durch die ihre Spitzen verbindende Diagonale halbart werden.

Beweis. Da die Gegenwinkel gleich sind, so folgt hieraus, dass auch (Fig. 14.) $\angle ABD = \angle ADB$, folglich $AB = AD$ und analog $BC = DC$ ist.

Zusatz. In jedem gleichseitigen Parallelogramm halbart jede Diagonale die Winkel, deren Spitzen sie verbindet. (Beweis ganz ähnlich.)

51. Wenn man alle Seiten eines Antiparallelogramms halbart und die Halbierungspunkte verbindet, so ist das durch diese Verbindungslinien gebildete Viereck (EFGH Fig. 15.) ein Rhombus.

Beweis. Dass EFGH ein $\parallel$ gr ist, folgt aus $HE \parallel BD \parallel FG$ und $EF \parallel AC \parallel HG$ (12. Zus.) Dass es ein Rhombus ist, folgt aus $\angle AEH \cong \angle EBF$. Folgt auch aus 31. Zus., weil die Diagonalen gleich sind.

52. Das auf die so eben angegebene Weise entstandene gleichseitige Parallelogramm wird auch gleichwinklig, also ein Quadrat, wenn das Antiparallelo-

gramm so beschaffen ist, dass die beiden parallelen Seiten um die halbe Summe ihrer eigenen Längen von einander entfernt sind.

Beweis. Wenn (Fig. 16.) der Abstand der Parallelen gleich der halben Summe der Parallelen selbst ist, so ist $EG = HF$. Aus 48. folgt dann aber, dass $EFGH$ ein Quadrat ist. (EG ist die Höhe, weil im Rhombus die Diagonalen auf einander senkrecht stehen.)

53. Je zwei an einander angrenzende Seiten unseres Rhombus bilden mit der Seite des Antiparallelogramms, von deren Halbirungspunkte sie auslaufen, zwei Winkel, deren Unterschied eben so gross ist, als der Unterschied der beiden Winkel des Antiparallelogramms, die an eben dieser Seite liegen.

Beweis. Zieht man (Fig. 15.) $KL \parallel EG$, so steht diese Linie auf den parallelen Seiten senkrecht, folglich ist

$$\begin{array}{r} ABC = R + \alpha \\ BCD = R - \alpha \\ \hline ABC - BCD = 2\alpha. \end{array}$$

In den congruenten Dreiecken EFK und GFL ist aber auch $EFK = GFL$, folglich

$$\begin{array}{l} GFC - \alpha = EFB + \alpha \text{ oder} \\ GFC - EFB = 2\alpha; \end{array}$$

es sind also die bezeichneten Differenzen gleich, w. z. b. w.

54. Erklärung. Zugeordnete Seiten eines Vierecks heissen je zwei solche Linien, die keinen gemeinschaftlichen Endpunkt haben, also jedes Paar der Gegenseiten und die Diagonalen.

55. Werden zwei beliebige Paare zugeordneter Seiten eines Vierecks halbirt, so bilden die diese Halbirungspunkte verbindenden Geraden ein Parallelogramm.

Beweis. Nach 12. Zus. ist (Fig. 17.) $FG \parallel AB \parallel EH$ und $FH \parallel DC \parallel GE$. Eben so leicht ergibt sich der Satz für die Mittelpunkte der Seiten

Zusätze. a) Der Satz ist eine Erweiterung von 51, nur dass dort das $\parallel$ gr ein Rhombus ist.

b) Beim Antiparallelogramm bilden die Verbindungslinien der Mittelpunkte der Diagonalen mit denen der nicht parallelen Seiten kein $\parallel$ gr mehr, sondern blos eine gerade Linie. Beim $\parallel$ gr ist diess der Fall mit jenen Verbindungslinien nach den Mittelpunkten beider Seitenpaare.

56. Wenn man von den Endpunkten der Grundlinie eines gleichschenkligen Dreiecks (ABC Fig. 18) auf dem einen Schenkel selbst, und auf des andern Verlängerung zwei Stücke von beliebiger, aber gleicher Länge abschneidet ($CE = BD$), so wird die Gerade (DE), welche diese beiden Durchschnittspunkte verbindet, durch die Grundlinie halbirt ($DG = EG$.)

Beweis. Man ziehe $DF \parallel BC$ und $DH \parallel AC$. Dann ergibt sich leicht (weil $\triangle ADF$ auch gleichschenklig sein muss), dass $DB = FC = DH$, folglich auch $CE = DH$ ist. Nun ist aber $\angle DGH \cong \angle GCE$ (eine Seite und zwei Winkel gleich), folglich $DG = GE$, w. z. b. w.

Zusätze. a) Wenn man in einem Dreiecke die im Hauptsatze angegebene Construction macht und es wird die Verbindungslinie der Abtragungspunkte von der Dreiecksseite halbirt, so ist das Dreieck ein gleichschenkliges.

b) Wenn man auf einem Schenkel eines gleichschenkligen Dreiecks von der Grundlinie aus ein Stück (BD Fig. 18.) abschneidet, durch den Abtragungspunkt eine Gerade (DE) nach der über die Grundlinie gemachten Verlängerung des andern Schenkels zieht und es wird diese Verbindungslinie von der Grundlinie halbirt, so ist das von der Verlängerung abgeschnittene Stück gleich dem vom andern Schenkel abgeschnittenen ($CE = BD$). (Die Beweise beider Umkehrungen des Hauptsatzes lassen sich durch Anwendung derselben Sätze in umgekehrter Folge führen.)

57. Zieht man aus der Spitze eines von zwei ungleichen Seiten gebildeten Dreieckswinkels eine Gerade nach dem Halbirungspunkte der Gegenseite, so theilt diese den Winkel in zwei ungleiche Stücke und

zwar ist der grössere der beiden Winkel derjenige, welcher die kleinere Dreiecksseite zu einem seiner Schenkel hat ($\angle BAE > \angle EAC$).

Beweis. Man verlängere (Fig. 19.) AE um seine eigene Länge und ziehe DC , so ist $\angle ABE \cong \angle ECD$ (zwei Seiten und der eingeschlossene Winkel sind gleich), folglich Winkel $\angle BAE = \angle EDC$. Nun ist aber $\angle EDC > \angle EAC$, weil $AC > AB$ und also auch $> CD$ ist, folglich auch $\angle BAE > \angle EAC$, w. z. b. w.

58. Zwei rechtwinklige Dreiecke sind congruent, wenn die Hypotenuse und die Kathetensumme des einen einzeln den entsprechenden Stücken des andern gleich sind.

Beweis. Man denke sich (Fig. 20.) die kleineren Katheten BC und $B'C'$ über die Scheitel um die andern verlängert, $CD = AC$, $C'D' = A'C'$ und AD und $A'D'$ gezogen, dann ist $\angle ABD \cong \angle A'B'D'$ (zwei Seiten und der Gegenwinkel der einen gleich, die Gegenwinkel der andern sind zugleich spitze, (I. §. 70.)) Dass die Winkel bei A und A' zugleich spitze sind, folgt daraus: da BC und $B'C'$ die kleineren Katheten sind, so sind $\angle BAC$ und $\angle B'A'C'$ kleiner als 45° ; nun ist $\angle CAD = \angle C'A'D' = 45^\circ$, folglich die Summe $\angle BAD$ resp. $\angle B'A'D' < R$. Aus der Congruenz folgt Winkel $\angle ABC = \angle A'B'C'$ und hieraus $\angle ABC \cong \angle A'B'C'$ (eine Seite und zwei Winkel gleich (I. §. 64.))

59. Wenn man auf der Hypotenuse (BC Fig. 21.) eines gleichschenkligen-rechtwinkligen Dreiecks (ABC) von einem ihrer Endpunkte (C) aus ein Stück (CD) gleich der Schenkellänge abschneidet, diesen Punkt mit der Spitze des Gegenwinkels verbindet und zugleich in ihm auf der Hypotenuse eine Senkrechte (DE) errichtet und bis zum Durchschnitt mit dem nähern Schenkel (AB) verlängert, durch diesen Punkt (E) eine Parallele mit der Hypotenuse zieht, welche die erstere der gezogenen Linien (DA) in H und die andere Kathete (AC) in F schneidet, endlich aus F eine Senkrechte (FG) auf die Hypotenuse fällt und GH zieht,

so entstehen ausser dem ursprünglichen noch acht gleichschenklige Dreiecke.

Beweis. Zunächst überzeugt man sich sofort, dass 1) $\triangle AEF$, 2) $\triangle FGC$, 3) $\triangle EDB$ gleichschenklige sind, weil sie mit dem ursprünglichen gleiche Winkel haben. Ferner ist 4) $\triangle ACD$ nach Construction und deshalb auch 5) $\triangle AHF$ als gleichwinklig mit jenem gleichschenklige. Da in $\triangle ACD$ die Winkel bei A und D gleich sind, so sind die Differenzen zwischen ihnen und Rechten, d. h. EAD und EDA gleich, also 6) $\triangle AED$ gleichschenklige. Nun ist $HF = AF = EA = ED = FG = GC$, folglich $HFCG$ ein $\parallel$ gr. (I. §. 93.) und es schneidet deshalb die Linie HG von ACD ein Dreieck HGD ab, welches gleichwinklig mit $\triangle ACD$ ist. Es ist somit auch 7) $\triangle HGD$ gleichschenklige. Dass endlich 8) $\triangle HFG$ gleichschenklige ist, folgt aus $HF = FG$.

60. Wenn in einem rechtwinkligen Dreieck einer der spitzen Winkel doppelt so gross ist als der andere, so ist auch stets die Hypotenuse doppelt so gross als die kleinere Kathete.

Beweis. Der grössere spitze Winkel ist in diesem Falle offenbar 60° , trägt man deshalb den kleinern auf der entgegengesetzten Seite noch einmal an und verlängert den gezogenen Schenkel bis zum Durchschnitt mit der nicht daranstossenden Kathete, so entsteht ein gleichseitiges Dreieck, wo die Höhe die Grundlinie halbt, u. s. w.

Zusätze. a) Wenn in einem rechtwinkligen Dreieck die Hypotenuse doppelt so gross ist als eine Kathete, so ist der an der Kathete liegende spitze Winkel doppelt so gross als der andere.

b) Wenn in einem Dreiecke eine Seite doppelt so gross ist als eine zweite und der von beiden eingeschlossene Winkel doppelt so gross ist als der andere an der grössern von beiden Seiten liegende Winkel, so ist das Dreieck ein rechtwinkliges.

Beweise. a) ergibt sich leicht, wenn man die in Rede stehende Kathete um ihre Grösse über den Rechten hinaus verlängert und das gleichschenklige Dreieck (35, d.) ergänzt, u. s. w.

b) Ist (Fig. 21 b) $AC = \frac{1}{2}BC$ und $\angle ACB = 2\angle ABD$, so halbire man BC in D und ACB durch EC und ziehe noch ED , so ist BEC ein

gleichschenkliges Dreieck und ED dessen Höhe. Ferner ist $\angle EAC \cong \angle ECD$ (zwei Seiten und der eingeschlossene Winkel gleich), folglich $EAC = EDC = R$, w. z. b. w.

61. Verbindet man in einem rechtwinkligen Dreiecke den Halbirungspunkt der Hypotenuse mit der Spitze des Gegenwinkels, so ist diese Linie gleich der halben Hypotenuse.

Beweis. Man ergänzt das Dreieck zu einem Rechteck, dann sind in demselben die Diagonalen gleich und halbiren einander.

Zusätze. a) Ist von der Spitze (B Fig. 22.) eines rechtwinkligen Dreiecks (ABC) an die Hypotenuse eine Gerade (BD) gezogen, welche gleich der halben Hypotenuse ist, und liegt das grössere Stück (DBC) des getheilten rechten Winkels an der kleineren Kathete (BC), so schneidet die gezogene Linie die Hypotenuse im Halbirungspunkte.

b) Wenn in einem Dreiecke die Verbindungslinie einer Winkelspitze mit der Mitte der Gegenseite gleich der halben Gegenseite ist, so ist das Dreieck an der vorbezeichneten Spitze rechtwinklig.

Beweise. a) Gesetzt D wäre nicht der Mittelpunkt der Hypotenuse, sondern D' , so müsste, wenn wir BD' zögen, $\angle BDD'$ gleichschenklilig sein. Nun ist aber offenbar $BD'C$ ein spitzer Winkel, weil $A < C$; ferner ist aber auch BDC ein spitzer aus demselben Grunde und weil $DBC > ABD$. Es ist deshalb $D'DB > R$, was ungereimt ist, wenn DD' Grundlinie eines gleichschenkligen Dreiecks sein soll.

b) Ist (Fig. 22.) $BD = AD = DC$, so ist $DBC = DCB$ und $ABD = BAD$, folglich, weil alle 4 Winkel $2R$ betragen, $ABD + DBC = R$.

62. Wenn in einem gleichschenkligen Dreiecke jeder Winkel an der Grundlinie doppelt so gross ist, als der dritte, und man halbirt einen der erstern, so wird durch diese Linie das Urdreieck in zwei ebenfalls gleichschenklige Dreiecke getheilt.

Beweis. Ergiebt sich sogleich aus der Gleichheit zweier Winkel.

Zusätze. a) Wenn man in einem gleichschenkligen Drei-

ecke (ABC Fig. 23.) aus einem Endpunkte (B) der Grundlinie (BC) an den gegenüber liegenden Schenkel (AC) eine Gerade (BD) zieht, welche gleich der Grundlinie ist ($BD=BC$), und es schneidet diese Gerade auf dem Schenkel von der Spitze (A) aus ein Stück (AD) ab, welches ebenfalls gleich der Grundlinie ist; so halbirt die Gerade (BD) den Winkel (ABC) an der Grundlinie.

Beweis. Nach Voraussetzung ist $\alpha + \beta = \delta = \varepsilon = \beta + \gamma$, folglich $\alpha = \gamma$ und da auch $\beta = \gamma$, so ist $\alpha = \beta$.

b) Wenn die bis zur Gegenseite gezogene Halbierungslinie (BD Fig. 23.) eines Winkels (ABC) im Dreieck (ABC) das letztere in zwei gleichschenklige Dreiecke theilt, deren Spitzen die Endpunkte (B und D) der Halbirenden sind, so ist das ursprüngliche Dreieck ebenfalls gleichschenklig (bei A), und zwar ist jeder Winkel an der Grundlinie doppelt so gross als der dritte ($\alpha + \beta = \delta = 2\gamma$).

Beweis. Nach Voraussetzung ist $\alpha = \beta = \gamma$ und $\delta = \varepsilon = \beta + \gamma$, folglich $\delta = \alpha + \beta = 2\gamma$.

c) Wenn von zwei Winkeln eines Dreiecks (ABC Fig. 23.) der eine doppelt so gross ist als der andere ($\angle ABC = 2\angle BAC$) und die Halbierungslinie des erstern theilt das Urdreieck in zwei gleichschenklige Dreiecke, die in dem Endpunkte der Halbirenden ihre Spitze haben, so ist das Urdreieck ebenfalls gleichschenklig ($\alpha + \beta = \delta$).

Beweis. Nach Voraussetzung ist $\alpha = \beta = \gamma$, da nun $\delta = \varepsilon = \beta + \gamma$, so ist auch $\delta = \alpha + \beta$.

63. Fällt man von einem beliebigen Punkte (D) eines gleichseitigen Dreiecks (ABC Fig. 24.) Lothe auf die drei Seiten, so ist die Summe derselben gleich der Höhe des Dreiecks ($DE + DF + DG = AN$).

Beweis. Ziehen wir die aus der Figur ersichtlichen Hülfslinien, so ergiebt sich zunächst, dass nur noch $AL = DG + DF$ zu erweisen bleibt. Nun ist aber $AL = HM$ als Höhen im gleichseitigen $\triangle AHI$ und $KM = DF$ als Gegenseiten im $\parallel$ gr, folglich bleibt nur noch $HK = DG$ zu erweisen. Es ist aber $\angle HGD \cong \angle HKD$, denn $\angle GHD$ ist $= 60^\circ$, $\angle KHD = 30^\circ$, folglich $\angle KDH$ auch $= 60^\circ$, also eine Seite und zwei Winkel gleich, folglich $HK = GD$, was nur noch zu zeigen war.

Zusatz. Liegt der Punkt ausserhalb des Dreiecks, so ist

die Höhe des Dreiecks gleich der Differenz zwischen dem Lothe resp. der Summe der beiden Lothe, welche mit dem Dreiecke auf derselben Seite von der Dreiecksseite liegen, worauf sie gefällt sind, und der Summe der beiden andern Lothe resp. dem dritten Lothe.

Beweis. Bei entsprechender Figur ganz analog.

64. Verbindet man die Halbierungspunkte (E und F) zweier Gegenseiten (AB und CD) eines Quadrats (ABCD Fig. 25.) durch eine Gerade (EF), zieht darauf nach derselben von einer Winkelspitze (B) eine zweite Gerade (BG) so, dass sie der Seite des Quadrats gleich ist, und endlich aus eben dieser Winkelspitze die Diagonale (BD), so ist der Winkel (GBD), welchen die beiden letzten der drei genannten Linien (BG und BD) mit einander bilden, gleich der Hälfte des von den beiden ersten (EF und BG) gebildeten und gleich dem dritten Theile des Winkels, welchen die erste und dritte (EF und BD) einschliessen.

Beweis. Offenbar ist $\angle AEG \cong \angle BEG$, folglich $AG = GB$ und deshalb $\angle AGB$ gleichseitig. Nun ist

$$\angle ABG = 60^\circ$$

$$\angle ABD = 45^\circ$$

$$\angle ABG - \angle ABD = \angle HBG = 15^\circ.$$

Da die Höhe EG den Winkel an der Spitze halbt, so ist $\angle EGB = 30^\circ$. Ferner ist $\angle EHB = 45^\circ$.

65. Wenn man auf der Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks von jedem ihrer Endpunkte aus ein Stück gleich der anliegenden Kathete abschneidet und diese Durchschnittspunkte mit der Spitze des rechten Winkels verbindet, so wird derselbe in drei Stücke getheilt, von denen das mittlere so gross ist als die beiden äusseren zusammen.

Beweis. Es sei ABC (Fig. 26.) das bei A rechtwinklige Dreieck, $BD = AB$ und $CE = AC$ auf der Hypotenuse abgeschnitten, so ist

$$\begin{array}{r}
 \alpha + \beta = \delta \\
 \beta + \gamma = \varepsilon \\
 \hline
 \alpha + \beta + \beta + \gamma = \delta + \varepsilon = 2R - \beta \\
 \alpha + \beta + \gamma = R \\
 \hline
 \beta = R - \beta \\
 2\beta = R \\
 \beta = 45^\circ.
 \end{array}$$

66. Wenn man in einem Dreiecke (ABC Fig. 26.) zwei Seiten auf der dritten abträgt, vom jedesmaligen Durchschnitte mit der abzutragenden Seite aus (AB=BD und AC=CE), die Abtragungspunkte mit der gegenüberliegenden Winkelspitze verbindet und es ist der von beiden Verbindungslinien eingeschlossene Winkel (β) gleich der Summe der beiden Winkel, welche diese Linien mit den Dreiecksseiten machen, mit denen sie sich in einem Punkte schneiden (also $\beta = \alpha + \gamma$), so ist der Dreieckswinkel an jenem Schnidepunkte ein Rechter ($BAC = R$). (Umkehrung des vorigen Satzes.)

Beweis.

$$\begin{array}{r}
 \beta + \gamma = \varepsilon \\
 \alpha + \beta = \delta \quad \left. \vphantom{\begin{array}{l} \beta + \gamma = \varepsilon \\ \alpha + \beta = \delta \end{array}} \right\} \text{nach Voraussetzung} \\
 \hline
 \alpha + \beta + \beta + \gamma = \varepsilon + \delta = 2R - \beta \\
 \alpha + \gamma = \beta \text{ nach Vorauss.} \\
 \hline
 2\beta = 2R - 2\beta \\
 \beta = R - \beta \\
 2\beta = R \\
 \beta = 45^\circ, \text{ folglich auch} \\
 \alpha + \gamma = 45^\circ \text{ und also} \\
 \alpha + \beta + \gamma = BAC = R.
 \end{array}$$

67. Wenn man auf der grössten Seite (BC Fig. 27.) eines ungleichseitigen Dreiecks (ABC) von jedem ihrer Endpunkte aus ein Stück abschneidet gleich der anliegenden kleineren Seite (BD = AB und CE = CA), und diese Durchschnittpunkte mit der Spitze des Gegen-

winkels verbindet, so ist der Winkel, den diese beiden Linien mit einander bilden, so gross als die halbe Summe der beiden kleineren Dreieckswinkel ($\beta = \frac{1}{2}(\pi + \omega)$).

$$\text{Beweis. } \alpha + \beta = \delta$$

$$\beta + \gamma = \varepsilon$$

$$\beta = \beta$$

$$\hline \alpha + 3\beta + \gamma = 2R$$

$$= \alpha + \beta + \gamma + \pi + \omega$$

$$\alpha + \beta + \gamma = \alpha + \beta + \gamma$$

$$\hline 2\beta = \pi + \omega$$

$$\beta = \frac{1}{2}(\pi + \omega).$$

(Dieser Satz ist eine Verallgemeinerung des vorigen.)

Zusatz. Wenn man in einem ungleichseitigen Dreiecke auf der grössten Seite (BC Fig. 27.) von einem Endpunkte (B) aus die daranstossende Dreiecksseite (BD = AB) abträgt, den Abtragungspunkt (D) mit der gegenüberliegenden Winkelspitze verbindet, und durch jene Winkelspitze zwischen der Verbindungslinie und der abgetragenen Seite eine Gerade (AE) zieht, welche mit ersterer einen Winkel gleich der halben Summe der kleineren Dreieckswinkel ($\beta = \frac{1}{2}(\pi + \omega)$) macht, so schneidet die zuletzt gezogene Linie auf der grössten Seite nach der nicht abgetragenen kleineren Seite zu ein Stück ab, welches gleich dieser kleineren Seite ist (EG = AC).

$$\text{Beweis. } \alpha + \beta = \delta \text{ nach Voraussetzung}$$

$$= \gamma + \omega \text{ als Aussenwinkel}$$

$$2\beta = \pi + \omega \text{ nach Voraussetzung}$$

$$\hline \alpha - \beta = \gamma - \pi \text{ nach Subtraction}$$

$$\alpha + \pi = \beta + \gamma$$

$$= \varepsilon.$$

68. Jede durch den Durchschnittspunkt der Diagonalen eines Parallelogramms hindurchgehende und von den Seiten desselben begrenzte Gerade wird in jenem Durchschnittspunkte halbt. (Aus diesem Grunde nennt man den Durchschnittspunkt der Diagonalen eines Parallelogramms auch wohl dessen Mittelpunkt.)

Beweis. Folgt mit Leichtigkeit aus der Congruenz der Dreiecke zwischen der Linie und einer Diagonale.

69. Wenn man über jeder Seite eines rechtwinkligen Dreiecks (ABC Fig. 28.) abwärts von den beiden andern ein Quadrat beschreibt und die nicht gemeinschaftlichen Endpunkte (E und F) zweier solchen Quadratseiten, die von demselben Endpunkte (C) der Hypotenuse auslaufen, mit den Spitzen derjenigen Dreieckswinkel (A und B) verbindet, welche den Seiten, über denen diese Quadrate beschrieben sind, gegenüberliegen, so schneiden sich diese beiden Linien (EA und BF) stets unter rechten Winkeln.

Beweis. Es ist $\angle ACE \cong \angle BCF$ (zwei Seiten und der eingeschlossene Winkel gleich), folglich Winkel $EAC = BFC$. Da bei N auch die Scheitelwinkel gleich sind, so ist Winkel $AON = NCF = R$.

70. Bleibt Alles wie im vorigen Satze und verbindet man die Endpunkte (I und F) der von den Endpunkten der Hypotenuse auslaufenden Seiten der Kathetenquadrate mit den Spitzen (C und B) der diesen Katheten gegenüberliegenden Dreieckswinkel, so schneiden sich diese Linien in einem Punkte (L), welcher auf dem Perpendikel (AR) liegt, das man aus der Spitze des rechten Winkels auf die Hypotenuse fällt.

Beweis. Man verlängere AR über A hinaus um die Hypotenuse ($AM = BC$) und verbinde M mit B und C, dann ist $\angle AKE \cong \angle MRC$ und ebenso $\angle KAD \cong \angle MRB$ (zwei Seiten und der eingeschlossene Winkel gleich). Hieraus folgt mit Leichtigkeit $MC \parallel AE$ und $MB \parallel AD$ und hieraus mit Rücksicht auf vorigen Satz, dass $MC \perp BF$ und $MB \perp IC$. Jetzt folgt endlich aus 22., dass sich die drei Linien AR, BF und IC in einem Punkte schneiden.

71. Die drei geraden Linien, welche die Halbierungspunkte von je zwei zugeordneten Seiten eines Vierecks verbinden, haben einen gemeinschaftlichen Durchschnittspunkt.

Beweis. Nach 55. bestimmen die Halbierungspunkte zweier

zugeordneten Seitenpaare ein Parallelogramm, mithin müssen je zwei der obengenannten Verbindungslinien als Diagonalen einander halbiren, folglich alle drei durch einen Punkt gehen.

72. Wenn man in einem spitzwinkligen Dreiecke (ABC Fig. 29.) sowohl die drei Höhen als auch gerade Linien von dem Punkte (M), der gleich weit von den Winkelspitzen entfernt ist, nach diesen Ecken zieht, so sind

1) je zwei solche Winkel (BAD und CAE oder BAE und CAD, welche zwei von derselben Winkelspitze auslaufende Linien (AD und AE u. s. w.) mit den beiden Seiten (AB und AC) des Dreiecks bilden, von gleicher Grösse;

2) der Winkel (DAE), welcher von einem der genannten Linienpaare gebildet wird, ist so gross als die von den beiden anderen Paaren gebildeten zusammengenommen (GBF + HCI).

Beweise. 1) $\angle AMB$, $\angle AMC$ und $\angle BMC$ sind bei M gleichschenkelig; es ist deshalb

$$2\angle MBC = 2R - (\angle BAG + \angle ABC + \angle ACI) \text{ oder} \\ = 2R - 2\alpha - 2\beta - 2\gamma$$

$$\angle MBC = R - \alpha - \beta - \gamma \dots (1), \text{ aber auch}$$

$$\angle MBC + \angle MBA + \angle BAE = R, \text{ oder}$$

$$\angle MBC = R - 2\alpha - \beta \dots (2).$$

Subtrahiren wir (1) von (2), so erhalten wir

$$0 = \alpha + \beta + \gamma - 2\alpha - \beta,$$

$$0 = \gamma - \alpha,$$

$$\gamma = \alpha, \text{ w. z. b. w.}$$

2) Es ist

$$\alpha + \beta + \gamma + \beta + \gamma - \varepsilon = R \dots (3) \text{ und}$$

$$\alpha + \beta + \gamma + \alpha + \delta = R \dots (4)$$

also $\alpha + \delta - \beta - \gamma + \varepsilon = 0$, wenn man (3) von 4 subtrahirt; oder $\alpha + \delta + \varepsilon = \beta + \gamma$; nun ist nach 1)

$$\alpha = \gamma$$

folglich

$$\delta + \varepsilon = \beta, \text{ w. z. b. w.}$$

Zusatz. Die Sätze gelten in gleicher Weise auch beim stumpfwinkligen Dreieck. Bei 2) ist stets derjenige Winkel gleich der Summe der beiden betreffenden anderen, welcher an der zum grössern Schenkel des grössten Winkels gehörigen Höhe liegt. Eben so geben die Sätze auch beim gleichschenkligen und gleichseitigen Dreiecke noch etwas Richtiges.

73. Zwei Dreiecke (ABC und DEF Fig. 30.) sind congruent, wenn ihre Umfänge und alle ihre Winkel einzeln gleich sind.

Beweis. Man verlängere in beiden Dreiecken die Gegenseiten gleicher Winkel nach beiden Seiten um die daranstossenden Seiten, $HC=CA$, $GB=AB$ und $FK=FD$, $EI=ED$ und ziehe AG, AH, DI, DK; dann sind in den entstandenen grossen Dreiecken eine Seite und die anliegenden Winkel gleich.

74. Verbindet man in einem Parallelogramm die Halbierungspunkte (E und F Fig. 31.) zweier Gegenseiten (AB und CD) mit den Endpunkten einer Diagonale (A und C), so wird durch diese Linie die andere Diagonale (BD) in drei gleiche Theile getheilt.

Beweis. Da $AE \parallel FC$, so ist auch $AF \parallel EC$, folglich, weil $BE=EA$ und $DF=FC$, auch $BH=HG=GD$. (II. §. 43. Vergl. auch Beweis zu 11).

75. Wenn man eine der Seiten (BC) eines Quadrats (ABCD Fig. 32.) um ihre eigene Grösse verlängert, über der ganzen so entstandenen Linie (BE) ein gleichseitiges Dreieck beschreibt und von einer Ecke (C) des Quadrats aus auf den von ihr auslaufenden Seiten Stücke (CH und CG) abschneidet, gleich dem Ueberschuss der Höhe des gleichseitigen Dreiecks über die Quadratseite, so ist das Dreieck (AGH), welches durch Verbindung dieser beiden Punkte unter einander und mit der Gegenecke des Quadrats entsteht, gleichseitig.

Beweis. Dass $\angle AGH$ gleichschenklig ist, ergibt sich ohne Weiteres; liesse sich demnach noch zeigen, dass Winkel $HAG=60^\circ$

wäre, dann wäre der Satz erwiesen. Nach der Construction ist FG gleich der Quadratseite, also auch $FG=AB$, woraus sich leicht ergibt, dass $\angle ABL \cong \angle GFL$ (eine Seite und zwei Winkel gleich). Hieraus folgt $BL=LF$, und da BF die doppelte Quadratseite ist, $BL=AB$ also $\angle ABL$ gleichschenkelig. Nun ist Winkel $ABL=90^\circ-60^\circ=30^\circ$, folglich $ALB=75^\circ$. Da ferner Winkel $AIL=60^\circ$, so ist $LAI=ALB-AIL=75^\circ-60^\circ=15^\circ$. Da nun $BAH=IAL$, so muss $HAG=60^\circ$ sein, was nur noch zu zeigen war.

76. Fällt man in einem gleichschenkligen Dreiecke aus einem der Endpunkte der Grundlinie ein Perpendikel auf den Gegenschinkel, so ist der Winkel (α), welchen dasselbe mit der Grundlinie bildet, halb so gross als der Winkel (β) an der Spitze.

Beweis. Bezeichnen wir den Winkel an der Grundlinie mit φ , so ist $\alpha=R-\varphi$, hingegen $\beta=2R-2\varphi$.

77. Wenn man entweder alle inneren oder alle äusseren Winkel eines Rechtecks halbt, so bilden die vier Halbirenden, bis zum gegenseitigen Durchschnitt verlängert, ein Quadrat.

Beweis. a) Die Dreiecke AGD und BEC sind congruent und gleichschenkelig, folglich $AG=GD=BE=CE$; dasselbe ist der Fall mit den Dreiecken AFB und DHC , also $AF=BF=DH=HC$. Durch Subtraction der gleichen Schenkel kommen wir auf $FE=EH=HG=FG$. (Dass die Winkel Rechte sind, folgt daraus, dass die Winkel an der Grundlinie in dem gleichschenkligen Dreiecke halbe Rechte sind.

b) Ganz auf dieselbe Weise beweist man den Satz für die Aussenwinkel. Hier sind die Dreiecke AND und BPC , so wie DQC und AOB ebenfalls rechtwinklig, gleichschenkelig und congruent. Durch Addition der Schenkel kommt man auf die Seiten des entstandenen Quadrats.

Zusatz. Macht man die angegebene Construction bei einem ganz beliebigen ungleichseitigen Viereck, so ist das neu entstehende Viereck ein sogenanntes Kreisviereck (um das sich ein Kreis beschreiben lässt), es betragen nämlich je zwei solche Gegenwinkel zusammen zwei Rechte.

Beweis. Bezeichnen wir die Winkel des Urvierecks durch 2α ,

2β , 2γ und 2δ , so wird man, wenn μ und ρ ein Paar Gegenwinkel sind, haben:

$$\begin{aligned}\mu &= 2R - (\alpha + \beta) \\ \rho &= 2R - (\gamma + \delta) \\ \hline \mu + \rho &= 4R - (\alpha + \beta + \gamma + \delta) = 2R, \\ \text{da } 2\alpha + 2\beta + 2\gamma + 2\delta &= 4R \text{ (I. §. 89.)}\end{aligned}$$

78. Schneidet man auf den Seiten eines Quadrats (ABCD Fig. 34.) von den Winkelspitzen aus Stücke (AH, BE, CF, DG) von beliebiger, aber gleicher Länge gleichmässig ab und verbindet diese Durchschnittspunkte sämtlich entweder mit den näheren oder den entfernteren Gegenecken des Quadrats, so ist das von diesen Verbindenden (AE, BF, CG, DH) gebildete Viereck (IKLM) gleichfalls ein Quadrat.

Beweis. Zunächst ist $\angle ADH \cong \angle AEB \cong \angle BFC \cong \angle CGD$ (zwei Seiten und der eingeschlossene Winkel gleich); hieraus ergibt sich ohne Weiteres, dass die Gegenseiten des Vierecks MLKI parallel sind. Nun sind aber auch folgende Dreiecke congruent, $\angle AMH \cong \angle BIE \cong \angle CKF \cong \angle DLG$ (eine Seite und zwei Winkel gleich); subtrahiren wir die gleichen Seiten der kleinen Dreiecke von denen der grossen, so folgt $ML = LK$. Es bleibt nun nur noch zu zeigen, dass ein Winkel ein Rechter ist. Es ist $BEA + BAE = R$, nun ist aber $BAE = IBE$ (weil $\angle HAM \cong \angle BIE$), folglich auch $BEI + EBI = R$ und also auch $BIE = MIK = R$.

Zusatz. Der Satz bleibt auch noch richtig, wenn die Stücke grösser als die Quadratseiten selber werden.

79. Wenn in einem Antiparallelogramm (ABCD Fig. 35.) eine der parallelen Seiten (BC) gleich ist jeder der beiden Diagonalen und man errichtet auf einer der nicht parallelen Seiten (AB) in dem an der genannten von den parallelen Seiten anliegenden Endpunkte (B) ein Perpendikel, so ist der Winkel, welchen diese Senkrechte mit der parallelen Seite bildet, (EBC), halb so gross als der Winkel, welchen eben

diese Seite (BC) mit der Diagonale in dem erwähnten Endpunkte bildet (CBD).

Beweis. Es soll $\angle EBC = \frac{1}{2} \angle DBC$ sein oder $\alpha = \frac{1}{2} \beta$. Es sind die Dreiecke BDC und CAB gleichschenkelig, folglich ist in $\triangle DBC$

$$\frac{1}{2} \beta = R - \gamma$$

und in $\triangle CAB$

$$R - \alpha = \gamma$$

$$\text{also } R + \frac{1}{2} \beta - \alpha = R \text{ (durch Addition)}$$

$$\text{oder } \frac{1}{2} \beta = \alpha, \text{ w. z. b. w.}$$

§0. Zwei rechtwinklige Dreiecke sind congruent, wenn eine Kathete und die Summe der beiden anderen Seiten in ihnen einzeln gleich sind. (Fig. 36.)

Beweis. Sind AB und DE die gleichen Katheten, so mache man $CG = AC$, $FH = DF$ und ziehe AG und DH; dann ist $\triangle ABG \cong \triangle DEH$ (zwei Seiten und der eingeschlossene Winkel gleich); hieraus folgt Winkel G = Winkel H und $AG = DH$, mithin ist auch $\triangle ACG \cong \triangle DFH$ (eine Seite und die anliegenden Winkel gleich); hieraus folgt $AC = DF$ und folglich ist $\triangle ABC \cong \triangle DEF$ (zwei Seiten und der Gegenwinkel der grösseren gleich).

§1. Zwei spitzwinklige Dreiecke sind congruent, wenn eine Seite die Summe der beiden anderen und ein der erstern anliegender Winkel des einen Dreiecks den entsprechenden Stücken des andern einzeln gleich sind.

Beweis. Ganz analog dem Beweise des vorigen Satzes.

§2. Zwei Quadrate sind congruent, wenn die Summe der Seiten und Diagonalen in dem einen eben so gross ist als in dem andern.

Beweis. Denken wir uns die Figur 37. noch einmal, und zwar mit bestrichenen Buchstaben bezeichnet, so ist, wenn die Umfänge sammt den Diagonalen beiderseits gleiche Summen haben, auch

$$BD + DC + BC = B'D' + D'C' + B'C'.$$

Machen wir $DE = DC$ und $BF = BC$, ziehen EC und FC und machen bei der andern Figur die entsprechende Construction, so

ist $\angle EFC \cong \angle E'F'C'$ (eine Seite und die anliegenden Winkel gleich — die anliegenden Winkel sind nämlich Viertel-Rechte —). Hieraus folgt $EC = E'C'$ und hieraus $\angle EDC \cong \angle E'D'C'$ (derselbe Satz), und endlich hieraus $DC = D'C'$. Die Quadrate über gleichen Seiten sind aber congruent.

§3. Zwei Quadrate sind congruent, wenn der Ueberschuss der Diagonale über die Seite in dem einen eben so gross ist, als in dem andern.

Beweis. Denken wir uns die Figur 38. zweimal, und zwar das zweitemal mit bestrichenen Buchstaben und verlängern beiderseits eine Quadratseite um den gleichen Ueberschuss $BE = B'E'$ und ziehe EA und $E'A'$; dann ist $AC = EC$ und $A'C' = E'C'$, folglich in den gleichschenkligen Dreiecken ACE und $A'C'E'$ Winkel $\angle AEB = \angle A'E'B' = \frac{3}{4}R$, und deshalb $\angle AEB \cong \angle A'E'B'$ und also $AB = A'B'$, u. s. w.

§4. Zwei gleichschenklige Dreiecke sind congruent, wenn die Summe des Schenkels und der Grundlinie so wie der Winkel an der Spitze in beiden einzeln gleich sind.

Beweis. Denken wir uns in ähnlicher Weise wie vorher Fig. 39. noch einmal ferner $CD = AC$, $C'D' = A'C'$ gemacht und AD und $A'D'$, gezogen, so ist, weil die Winkel an der Spitze gleich sind, auch $\angle ABC = \angle A'B'C'$ und $\angle ADB = \angle A'D'B'$, und da auch $BD = B'D'$, so ist $\angle ABD \cong \angle A'B'D'$ und deshalb auch $\angle ABC \cong \angle A'B'C'$ (zwei Seiten und der eingeschlossene Winkel gleich).

§5. Zwei gleichschenklige Dreiecke sind congruent, wenn der Unterschied zwischen Schenkel und Grundlinie, so wie der Winkel an der Spitze einzeln gleich sind.

Beweis. Es seien jetzt Fig. 39. ACD und $A'C'D'$ die gegebenen gleichschenkligen Dreiecke, $BC = B'C'$ seien die gleichen Ueberschüsse BA und $B'A'$ gezogen, dann ist $\angle ABC \cong \angle A'B'C'$ (eine Seite und die anliegenden Winkel gleich); hieraus folgt $AC = A'C'$ und hieraus $\angle ACD \cong \angle A'C'D'$ (zwei Seiten und der eingeschlossene Winkel gleich).

§6. Zwei gleichschenklige Dreiecke sind congruent, wenn die beiden Höhenperpendikel (aus der

Spitze auf die Grundlinie) und eine zweite Höhe in beiden Dreiecken bezüglich gleich sind.

Beweis. Denken wir uns Fig. 40 in früherer Weise noch einmal und ziehen $EF \parallel BD$, so ist $EF = \frac{1}{2}BD$ und bei entsprechender Construction $E'F' = \frac{1}{2}B'D'$; da nun $BD = B'D'$, so ist auch $EF = E'F'$ und folglich $\angle AEF \cong \angle A'E'F'$ (zwei Seiten und der Gegenwinkel der grösseren gleich), folglich $EAC = E'A'C'$ und also auch $BAC = B'A'C'$ und deshalb $\angle BAD \cong \angle B'A'D'$ (eine Seite und zwei Winkel gleich), und folglich $AB = A'B'$. Hieraus ergibt sich aber $\angle ABC \cong \angle A'B'C'$ (zwei Seiten und der eingeschlossene Winkel gleich).

87. Zwei gleichschenklige Dreiecke sind congruent, wenn die Summe des Schenkels und des aus der Spitze auf die Grundlinie gefällten Perpendikels, so wie der Winkel an der Spitze in ihnen einzeln gleich sind.

Beweis. Bei zweimal gedachter Figur 41. sei $AE = BA$, BE gezogen und in der andern Figur die entsprechende Construction ausgeführt gedacht, so ist $\angle BDE \cong \angle B'D'E'$ (eine Seite und die anliegenden Winkel gleich). Hieraus folgt $BD = B'D'$ und hieraus $\angle ABC \cong \angle A'B'C'$ (eine Seite und zwei Winkel gleich).

88. Zwei gleichschenklige Dreiecke sind congruent, wenn die Summe der Grundlinie und zugehörigen Höhe, so wie der Winkel an der Spitze in beiden dieselbe Grösse haben.

Beweis. Die Congruenz der Dreiecke würde sich sofort ergeben, wenn sich zeigen liesse, dass Höhe gleich Höhe und Grundlinie gleich Grundlinie sein muss. Diess ergibt sich aber leicht indirect. Wäre z. B. die Grundlinie des einen Dreiecks grösser als die des andern und man legte die Dreiecke so auf einander, dass Höhen und Grundlinien bezüglich zusammenfielen, so müssten, weil die Winkel an der Spitze gleich sind, die Schenkel parallel und also auch die zur grösseren Grundlinie gehörige Höhe die grössere werden. Diess ist aber gegen die Annahme, nach welcher Grundlinie und Höhe beiderseits gleiche Summen haben.

89. Zwei Dreiecke sind congruent, wenn eine

Seite und die zu den beiden anderen gehörigen Höhen einzeln gleich sind.

Beweis. Zunächst ergeben sich zwei Paare congruenter rechtwinkliger Dreiecke, in denen die gleichen Seiten Hypotenusen sind (zwei Seiten und der Gegenwinkel der grösseren gleich); aus dieser Congruenz folgt die Gleichheit zweier Winkel in den Urdreiecken und hieraus deren Congruenz (eine Seite und zwei Winkel gleich).

90. Zwei Dreiecke sind congruent, wenn zwei Seiten und die Höhe der dritten in ihnen einzeln gleich sind und die Seiten in beiden Dreiecken gleichzeitig entweder auf derselben oder auf entgegengesetzten Seiten der Höhe liegen.

Beweis. Zunächst ergeben sich zwei Paare congruenter rechtwinkliger Dreiecke; hieraus folgt die Gleichheit der Winkel an der Spitze der Höhe, hieraus nach Addition die Gleichheit der von den gleichen Seiten eingeschlossenen Winkel und endlich hieraus die Congruenz der ganzen Dreiecke.

91. Zwei gleichschenklige Dreiecke sind congruent, wenn ihre Umfänge und die zu den Grundlinien gehörigen Höhen in ihnen einzeln gleich sind.

Beweis. Denkt man sich die Grundlinien beiderseits um die anliegenden Schenkel verlängert und die Endpunkte der Verlängerungen mit der Spitze beiderseits verbunden, so erhält man zwei Paare rechtwinkliger congruenter Dreiecke (zwei Seiten und der eingeschlossene Winkel gleich), woraus man die Gleichheit der Schenkel beiderseits und hieraus die Congruenz der gleichschenkligen Dreiecke selbst folgert.

92. Zwei Dreiecke sind congruent, wenn eine Seite, die Summe der beiden anderen und der von den letzteren eingeschlossene Winkel in ihnen einzeln gleich sind.

Beweis. Es sei im $\triangle ABC$ und $\triangle A'B'C'$ die Seite $AB = A'B'$, W. $\angle ACB = \angle A'C'B'$ und $AC + BC = A'C' + B'C'$. Man denke sich BC um

AC verlängert bis D und so entsprechend beim andern Dreieck, endlich AD und A'D' gezogen, so sind in den Dreiecken ABD und A'B'D' zwei Seiten und der Gegenwinkel der einen gleich, Congruent sind sie deshalb nur, wenn die Nebenbestimmung statt findet, dass die Gegenwinkel der andern Seite zugleich $>$ oder $<$ R sind. Ist diese Bestimmung nicht gegeben, so lässt sich über die Congruenz der Dreiecke ABD und A'B'D', dann aber auch nicht über die von $\angle ABC$ und $\angle A'B'C'$ urtheilen.

93. Zwei Dreiecke sind congruent, wenn eine Seite, der Unterschied der beiden anderen und der von den letzteren eingeschlossene Winkel in ihnen einzeln gleich sind.

Beweis. Denkt man sich zwei Dreiecke ABC und A'B'C', wo $AB = A'B'$, $ACB = A'C'B'$ und $BC - AC = B'C' - A'C'$ und AC auf CB von C aus abgetragen $= CD$ und ebenso im andern $A'C' = C'D'$, ferner noch DA und D'A' gezogen, so sind in den Dreiecken ABD und A'B'D' wieder zwei Seiten und der Gegenwinkel der einen gleich und es ist also ohne weitere Bestimmung die Congruenz dieser, dann aber auch der Dreiecke ABC und A'B'C' zweifelhaft.

94. Zwei Dreiecke sind congruent, wenn eine Seite, der Unterschied der beiden anderen und der kleinere der beiden Gegenwinkel dieser letzteren einzeln in ihnen gleich sind.

Beweis. Es sei (Fig. 42.), wo die Figur noch einmal mit bestrichenen Buchstaben zu denken ist, $AB = A'B'$, $BC - AC (= BD) = B'C' - A'C' (= B'D')$ und $ABD = A'B'D'$. Ziehen wir AD und A'D', so ist $\angle ABD \cong \angle A'B'D'$ (zwei Seiten und der eingeschlossene Winkel gleich). Hieraus folgt $ADB = A'D'B'$ und deshalb $ADC (= DAC) = A'D'C'$ ($= D'A'C'$, weil $AC = CD$ u. s. w.), ferner $AD = A'D'$ und deshalb $\angle ACD \cong \angle A'C'D'$, woraus dann mit Leichtigkeit $\angle BAC \cong \angle B'A'C'$ folgt.

95. Halbirt man alle Winkel eines Dreiecks und fällt aus dem gemeinschaftlichen Durchschnittspunkte der Halbirenden Senkrechte auf die Seiten, so werden letztere in solche Stücke getheilt, dass

1) je zwei von derselben Ecke des Dreiecks auslaufende von gleicher Länge sind und

2) jedes derselben halb so gross ist, als der Ueberschuss der Summe der beiden Seiten, von denen sie Stücke sind, über die dritte.

Beweis. 1) Folgt aus der Congruenz von Dreiecken (eine Seite der Gegenwinkel und ein anliegender gleich). 2) folgt unmittelbar aus 1).

96. Zwei Dreiecke sind congruent, wenn eine Seite, der Unterschied der beiden anderen und der grössere ihrer Gegenwinkel einzeln in ihnen gleich sind.

Beweis. Denken wir uns Fig. 43. in ähnlicher Weise wie vorher noch einmal und sei $BC = B'C' = a$ und $AB - AC = A'B' - A'C' = d$ und endlich $\angle ACB = \angle A'C'B'$, so halbire man ABC und ACB und fälle $DE \perp BC$, dann ist 95, 2)

$$BE = \frac{1}{2}AB + \frac{1}{2}BC - \frac{1}{2}AC$$

$$B'E' = \frac{1}{2}A'B' + \frac{1}{2}B'C' - \frac{1}{2}A'C'$$

$$EC = \frac{1}{2}AC + \frac{1}{2}BC - \frac{1}{2}AB$$

$$E'C' = \frac{1}{2}A'C' + \frac{1}{2}B'C' - \frac{1}{2}A'B'$$

$$BE - EC = AB - AC = d$$

$$B'E' - E'C' = A'B' - A'C' = d,$$

$$\text{und da } BE + EC = a;$$

$$B'E' + E'C' = a$$

$$\text{so ist } BE = \frac{a+d}{2};$$

$$B'E' = \frac{a+d}{2}$$

$$EC = \frac{a-d}{2};$$

$$E'C' = \frac{a-d}{2},$$

folglich $\triangle DEC \cong \triangle D'E'C'$ (eine Seite und die anliegenden Winkel gleich). Hieraus folgt $DE = D'E'$ und hieraus $\triangle DEB \cong \triangle D'E'B'$ (zwei Seiten und der eingeschlossene Winkel gleich), und hieraus $\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$ (eine Seite und die anliegenden Winkel gleich).

97. Zwei Dreiecke sind congruent, wenn eine Seite, der Unterschied der beiden anderen und der Unterschied der Gegenwinkel dieser letzteren einzeln in ihnen gleich sind.

Beweis. Denken wir uns Fig. 44 noch einmal mit bestrichenen Buchstaben und sei $AB = A'B' = a$, $\angle CAB - \angle CBA = \angle C'A'B' - \angle C'B'A' = \alpha - \beta = \delta$ und $CB - AC = C'B' - A'C' = d$, so trage man $\frac{1}{2}\delta$ an AB und $A'B'$ bezüglich an, dann ist

$$\varphi = \beta + \frac{1}{2}\delta \text{ als Aussenwinkel,}$$

$$\delta = \alpha - \beta \text{ nach Voraussetzung,}$$

$$\text{folglich } \varphi + \delta = \alpha + \frac{1}{2}\delta,$$

$$\varphi = \alpha - \frac{1}{2}\delta, \text{ und ebenso } \varphi' = \alpha' - \frac{1}{2}\delta,$$

mithin $\triangle ACD$ und $\triangle A'C'D'$ gleichschenkelig, folglich $BD = B'D' = d$. Es ist demnach $\triangle ADB \cong \triangle A'D'B'$ (zwei Seiten und der Gegenwinkel der einen gleich, die Gegenwinkel der andern sind beiderseits stumpfe), und folglich auch $ABD = A'B'D'$ oder $\beta = \beta'$, deshalb aber auch $\alpha = \alpha'$ und darum $\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$ (eine Seite und die anliegenden Winkel gleich).

98. Zwei Dreiecke sind congruent, wenn eine Seite, die Summe der beiden anderen und der Unterschied der Gegenwinkel der letztern einzeln gleich sind.

Beweis. Denken wir uns Fig. 45. wieder in früherer Weise noch einmal, und zwar $CD = AC$ gemacht, AD und $AE \perp AD$ gezogen und so entsprechend in der andern Figur. Es sei nun $AB = A'B'$, $\alpha - \beta = \alpha' - \beta'$ und $AC + BC = A'C' + B'C'$ nach Voraussetzung, so lässt sich zunächst zeigen, dass $\varphi = \varphi' = \frac{1}{2}(\alpha - \beta) = \frac{1}{2}(\alpha' - \beta')$. Es ist nämlich

$$2\gamma + \alpha + \beta = 2R$$

$$\gamma + \beta + \varphi = R, \text{ folglich}$$

$$2\gamma + \alpha + \beta = 2\gamma + 2\beta + 2\varphi$$

$$\alpha = \beta + 2\varphi$$

$$\frac{1}{2}(\alpha - \beta) = \varphi, \text{ und ebenso}$$

$$\frac{1}{2}(\alpha' - \beta') = \varphi' \text{ und also, weil}$$

$$\alpha - \beta = \alpha' - \beta', \text{ auch } \varphi = \varphi'.$$

Hieraus folgt aber mit Leichtigkeit durch Subtraction von einem Rechten

$$\angle DAB = \angle D'A'B'$$

und hieraus, da die Winkel offenbar die grösseren von den beiden Gegenwinkeln sind, dass

$$\triangle ADB \cong \triangle A'D'B'$$

(zwei Seiten und der Gegenwinkel der grösseren gleich). Hieraus folgt $\alpha = \alpha'$, und weil auch $\alpha - \beta = \alpha' - \beta'$ auch $\beta = \beta'$, und deshalb $\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$ (eine Seite und die anliegenden Winkel gleich).

99. Zwei Dreiecke sind congruent, wenn eine Seite, die Summe der beiden anderen und das zu der grösseren oder kleineren dieser letzteren in beiden Dreiecken gehörige Höhenperpendikel einzeln gleich sind.

Beweis. Fallen die Höhen innerhalb, so ergibt sich leicht die Congruenz der rechtwinkligen Dreiecke zwischen den Höhen und Seiten und dann nach 81. die der Urdreiecke. Fällt jedoch die Höhe ausserhalb, so bleibt nach Erweisung der Congruenz vorbezeichneter Dreiecke nur noch zu erweisen übrig, dass zwei Dreiecke congruent sind, wenn eine Seite, die Summe der beiden andern und der Gegenwinkel der grösseren der letzteren in beiden gleich sind. Diess beweist man dadurch, dass man die kleineren Seiten um die grösseren Seiten verlängert, die Dreiecke vollendet und deren Congruenz nachweist (zwei Seiten und der eingeschlossene Winkel gleich), worauf die der Urdreiecke sich ebenfalls leicht ergibt (eine Seite und zwei Winkel gleich).

100. Zwei Dreiecke sind congruent, wenn eine Seite, die Summe der beiden anderen und das zu der grösseren oder kleineren dieser letzteren in beiden Dreiecken gehörige Höhenperpendikel einzeln gleich sind.

Beweis. Aus der Congruenz der rechtwinkligen Dreiecke zwischen den Höhen und den gegebenen Seiten erhält man noch ein Paar gleiche Winkel und kann dann die Congruenz der ursprünglichen Dreiecke nach 94. resp. 96. beweisen.

101. Zwei Dreiecke sind congruent, wenn der Umfang, ein Winkel und das zu einer von den diesen Winkel einschliessenden Seiten gehörige Höhenperpendikel des einen einzeln den entsprechenden Stücken des andern gleich sind.

Beweis. Denken wir uns Fig. 46. mit gestrichenen Buchstaben noch einmal und sei nämlich $AD = A'D'$, W. $C = C'$, ferner $AC + BC + AB = A'C' + B'C' + A'B'$, so lässt sich zunächst $\angle ACD \cong \angle A'C'D'$ mit Leichtigkeit erweisen. Hieraus folgt $AC = A'C'$ und es ist deshalb

auch $AB + BC = A'B' + B'C'$. Verlängert man nun BC und $B'C'$ über B und B' um AB und $A'B'$ und zieht EA und $E'A'$, so ist $\angle ACE \cong \angle A'C'E'$ (zwei Seiten und der eingeschlossene Winkel gleich), folglich $E = E'$ und also auch $W. ABC = A'B'C'$ und also $\angle ABC \cong \angle A'B'C'$ (eine Seite und zwei Winkel gleich.) [Der Beweis ist im Wesentlichen derselbe, wenn die Höhe ausserhalb des Dreiecks fällt.]

102. Zwei Paralleltrapeze sind congruent, wenn die vier Seiten des einen einzeln den vier Seiten des andern gleich sind.

Beweis. Es ist blos zu zeigen, dass noch ein Winkel des einen einem Winkel des andern gleich ist. Zieht man Fig. 47. $DE \parallel AB$ und entsprechend $D'E' \parallel A'B'$, so ist $\angle DEC \cong \angle D'E'C'$ (alle drei Seiten gleich, $EC = E'C'$, nämlich als Differenz gleicher Seiten). Hieraus folgt $W. c = c'$, und also auch alle übrigen Winkel.

103. Zwei Vierecke sind congruent, wenn drei Seiten und die beiden zwischen denselben liegenden Winkel einzeln gleich sind.

Beweis. Es sei Fig. 48. $AB = A'B'$, $BC = B'C'$, $CD = C'D'$, $W. ABC = A'B'C'$ und $W. BCD = B'C'D'$. Man ziehe AC und $A'C'$, dann folgt leicht $\angle ABC \cong \angle A'B'C'$ und hieraus $AC = A'C'$, $BAD = B'A'D'$, $ACB = A'C'B'$. Es ist nun auch, wie man leicht sieht, $W. ACD = A'C'D'$ und deshalb $\angle ACD \cong \angle A'C'D'$, woraus man nach Zuziehung der vorigen Congruenz die Gleichheit aller übrigen Stücke in beiden Vierecken folgert.

104. Zwei Vierecke sind congruent, wenn alle Seiten und ein beliebiger Winkel einzeln in beiden gleich sind.

Beweis. Zieht man Fig. 48. die dem gleichen Winkel $B = B'$ gegenüberliegende Diagonale AC , so ergibt sich leicht $\angle ABC \cong \angle A'B'C'$ und hieraus $\angle ADC \cong \angle A'D'C'$ und daraus die Gleichheit sämtlicher Winkel beider Vierecke.

Zusatz. Der vorstehende Satz gilt nur für Vierecke ohne einspringende Winkel. Soll er auch für Vierecke mit einspringenden Winkeln Geltung haben, so muss noch die Bestimmung hinzukommen, dass die den gleichen Winkeln gegenüber-

liegenden Winkel zugleich grösser oder kleiner als zwei Rechte sein müssen. (Dieser Satz entspricht dem vierten Congruenzsatze. (I. §. 70.)

105. Zwei Vierecke sind congruent (Fig. 49^a. und 49^b.), wenn diejenigen Segmente eines Paares zugeordneter Seiten, welche zwischen ihren eigenen Durchschnittspunkten und den mit den beiden anderen zugeordneten Seitenpaaren liegen ($AE=A'E'$, $AD=A'D'$, $BE=B'E'$, $CE=C'E'$) in derselben Reihenfolge einzeln gleich und ausserdem die Winkel gleich sind, welche von je zwei gleichen Segmentenpaaren gebildet werden ($\angle AED=\angle A'E'D'$).

Beweis. Leicht ergibt sich $\angle AED \cong \angle A'E'D'$ und $\angle BED \cong \angle B'E'D'$ und hieraus $AD=A'D'$ und $BC=B'C'$. In Fig. 49^a. ergibt sich hieraus auch noch W. $B=B'$, $C=C'$ und $AB=A'B'$, $DC=D'C'$, so dass die Vierecke nach 104. $\cong$ sind. In Fig. 49^b. hat man noch die Congruenz der Dreiecke AEB und $A'E'B'$, sowie DEC und $D'E'C'$ zuzuziehen um die noch fehlenden Stücke zur Anwendung von 104. zu erhalten.

106. Zwei Vierecke sind congruent, wenn drei Seiten und die beiden nicht eingeschlossenen Winkel in ihnen einzeln gleich sind, und ausserdem die Summe dieser beiden Winkel grösser ist als die Summe der beiden anderen.

Beweis. Es sei (Fig. 50.) $AB=A'B'$, $BC=B'C'$, $CD=C'D'$, W. $A=A'$, $D=D'$. Man fälle BF , CE , BG und so die entsprechenden Lothe in der noch zu denkenden Figur, dann ergeben sich leicht folgende Congruenzen, $\angle ABF \cong \angle A'B'F'$, $\angle CED \cong \angle C'E'D'$, $\angle BCG \cong \angle B'C'G'$ und hieraus die noch fehlenden Stücke zur Anwendung von 103.

Zusatz. Fehlt die bei den Winkeln gemachte Bedingung, so ist die Congruenz der Vierecke nicht unbedingt nothwendig. Man kann sich leicht überzeugen, wenn man aus den gegebenen Stücken das Viereck construirt. Trägt man an eine Linie AX (Fig. 51.) den Winkel α an, macht $AB=a$, schlägt von B aus mit b einen Kreis, trägt β irgend wo an AX an, macht $xy=c$, zieht durch x

eine Parallele mit ax , so schneidet diese den Kreis in zwei Punkten und es enthalten sowohl Viereck $ABCD$ als auch $AB'CD$ die gegebenen Stücke, ohne congruent zu sein. Ist jedoch $\alpha + \beta > 2R$, so kann kein einspringender Winkel ausserdem vorkommen, und es lässt sich also nur ein Viereck aus jenen Stücken construiren.

107. Zwei Vierecke sind congruent, wenn drei Seiten, einer von den eingeschlossenen Winkeln und sein Gegenwinkel in dem einen den entsprechenden Stücken in dem andern einzeln gleich sind und die anderen an den nicht gleichen Seiten liegenden Winkel zugleich spitze oder stumpfe sind. (Fig. 52.)

Beweis. Sind BC, CA, AD, α und β den entsprechenden Stücken gleich, so ist, wenn man AB zieht, $\angle ABC \cong \angle A'B'C'$, woraus $AB = A'B'$ und also $\angle ABD \cong \angle A'B'D'$ folgt. Hieraus erhält man die noch fehlenden Winkel bei A und A' zur Anwendung von 103.

Zusatz. Fehlt die gesperrt gedruckte Bedingung, so ist die Congruenz nicht unbedingt nothwendig. Zieht man nämlich $ab = AB$, construirt $\angle abc \cong \angle ABC$, so enthalten die Vierecke $acbd$ und $acbd$ dieselben Stücke, ohne congruent zu sein.

108. Zwei Vierecke sind congruent, wenn drei Seiten, einer der eingeschlossenen Winkel und der mit diesem an derselben Seite liegende nicht eingeschlossene des einen Vierecks einzeln den entsprechenden Stücken des andern gleich, und ausserdem die beiden Gegenwinkel des ersteren Paares zugleich kleiner oder grösser als ein Rechter sind.

Beweis. Ist (Fig. 49^b.) $AB = A'B', AD = A'D', DC = D'C', W. A = A', B = B'$, so ziehe man BD und $B'D'$, so ist $\angle ADB \cong \angle A'D'B'$. Hieraus ergibt sich $BD = B'D'$, und weil $B = B'$, auch $DBC = D'B'C'$, und es ist deshalb auch $\angle DBC \cong \angle D'B'C'$, mithin auch $C = C'$ und die Vierecke congruent nach 107.

109. Zwei Vierecke sind congruent, wenn zwei Seiten und alle Winkel einzeln gleich sind.

Beweis. Ist (Fig. 48.) $AB = A'B'$, $BC = B'C'$ und W. $A = A'$, $B = B'$, $C = C'$, $D = D'$, so ziehe man AC und $A'C'$, so ist $\angle ABC \cong \angle A'B'C'$ und folglich $AC = A'C'$. Nun ergibt sich aber auch leicht $\angle ADC \cong \angle A'D'C'$ (eine Seite und zwei Winkel gleich) und es stimmen somit die Vierecke in allen Stücken überein.

110. Zwei Rauten (Rhomben) sind congruent, wenn ihre Umfänge und Diagonalensummen einzeln gleich sind.

Beweis. Zunächst sind, wenn in beiden Rauten die Umfänge gleich, auch die vierten Theile derselben, d. h. die Seiten gleich, ebenso, wenn die Diagonalensummen auch die halben Summen. Man wird deshalb, da die Diagonalen sich rechtwinklig schneiden, nach 92. erweisen können, dass die vier Dreiecke der einen Raute den entsprechenden der andern congruent sind und beide Rauten in allen Stücken übereinstimmen.

111. Jedes Parallelogramm wird durch jede Gerade, die man durch seinen Mittelpunkt (68. Anmerk.) zieht und bis zum Durchschnitt mit den Seiten beiderseits verlängert, in zwei congruente Hälften getheilt.

Beweis. Leicht ergibt sich die Congruenz zweier Dreiecke zwischen der gezogenen Linie und einer Diagonale und hieraus ergeben sich noch die fehlenden Stücke zur Anwendung von 103.

112. Erklärung. Hat man ein Paar beliebiger congruenter Figuren und nimmt innerhalb oder ausserhalb derselben zwei Punkte so, dass der eine derselben von jeder Seite sowohl als Ecke der einen Figur eben so weit entfernt ist, als der andere Punkt von den entsprechenden Seiten und Ecken der andern Figur, so sollen diese Punkte den Namen von Congruenzpunkten in Beziehung auf diese geradlinigen Figuren führen.

113. Wenn zwei Punkte eine solche Lage ge-

gen zwei congruente Dreiecke haben, dass die Entfernungen des einen von den Ecken des einen Dreiecks einzeln gleich sind den Entfernungen des andern Punktes von den entsprechenden Ecken des andern Dreiecks, so sind diese Punkte Congruenzpunkte für diese Dreiecke, d. h. sie sind auch von jedem Paare entsprechender Seiten gleich weit entfernt.

Beweis. Ist (Fig. 53.) $AG = A'G'$, $BG = B'G'$, $CG = C'G'$, so soll auch $EG = E'G'$, $FG = F'G'$, $DG = D'G'$ sein. Folgt aus $\angle AGB \cong \angle A'G'B'$, $\angle AGC \cong \angle A'G'C'$, $\angle BGC \cong \angle B'G'C'$ (alle drei Seiten gleich), denn in congruenten Dreiecken gehören zu gleichen Seiten gleiche Höhen.

114. Wenn zwei Punkte eine solche Lage gegen zwei congruente Dreiecke haben, dass die Entfernungen des einen von den Seiten des einen Dreiecks einzeln gleich sind den Entfernungen des andern Punktes von den entsprechenden Seiten des andern Dreiecks, so sind diese Punkte Congruenzpunkte für diese Dreiecke, d. h. sie haben von den Ecken ebenfalls bezüglich gleiche Entfernungen.

Beweis. In Fig. 53. ist Viereck $AEGD \cong A'E'G'D'$ und so die beiden anderen ähnlich liegenden Paare (nach 109). Hieraus ergibt sich $AG = A'G'$, $BG = B'G'$, $CG = C'G'$ als gleichliegende Stücke in congruenten Figuren.

115. Für congruente Dreiecke sind die Durchschnittspunkte der in den Mittelpunkten der Seiten errichteten Lothe Congruenzpunkte.

Beweis. Betrachten wir in Fig. 53. E, D, F u. s. w. als Halbierungspunkte der Seiten, so ergibt sich zunächst aus congruenten Dreiecken (zwei Seiten und der eingeschlossene Winkel gleich), dass $AG = BG = CG$ und ebenso $A'G' = B'G' = C'G'$. Es ist mithin nur $AG = A'G'$ zu erweisen. Diess folgt aber aus $AEGD \cong A'E'G'D'$ (nach 103.), da diese Linien gleichliegende Diagonalen sind.

116. Für congruente Dreiecke sind die Durchschnittspunkte der drei Höhen Congruenzpunkte.

Beweis. Es ist (Fig. 54.) zu beweisen, dass $AG = A'G'$, $BG = B'G'$ und $CG = C'G'$ ist, wenn wir uns eine entsprechende Figur denken. Ziehen wir durch die Winkelspitzen Parallelen mit den Seiten, so sind die entstandenen Dreiecke congruent, $\angle HIK \cong \angle H'I'K'$, denn ihre Seiten sind ja doppelt so gross als die des ursprünglichen. Hier ist aber $AG = A'G'$ u. s. w. nach 115.

117. In congruenten Dreiecken sind die gemeinschaftlichen Durchschnittspunkte sowohl der Linien, welche die inneren Winkel halbiren, als auch diejenigen, welche zwei äussere und einen innern, die in beiden Dreiecken einander entsprechen, halbiren, Congruenzpunkte.

Beweis. Dass in (Fig. 55.) $AD = A'D'$, $BD = B'D'$, $DC = D'C'$ und $ED = E'D'$, $DF = D'F'$, $DG = D'G'$ ist, folgt aus der Congruenz der Dreiecke, von denen die letzteren Höhen sind (eine Seite und die anliegenden Winkel gleich). Dass K und K' Congruenzpunkte sind, wird ganz analog bewiesen.

118. Hat man in zwei congruenten Dreiecken zwei Paare von Congruenzpunkten, die auf zwei Seiten oder deren Verlängerungen der zugehörigen Dreiecke liegen und verbindet dieselben mit den Gegenecken, so sind die Durchschnittspunkte dieser Geraden ebenfalls Congruenzpunkte. (Fig. 56.)

Beweis. Zunächst ist $\angle ABE \cong \angle A'B'E'$ und $\angle BDC \cong \angle B'D'C'$ (zwei Seiten und der eingeschlossene Winkel gleich), folglich sind in den Vierecken $BDFE$ und $B'D'F'E'$ alle Winkel und zwei Seiten gleich, dieselben also (109.) congruent. und also $BF = B'F'$ als gleichliegende Diagonalen. Nun ergeben sich auch als Differenzen gleicher Linien $AF = A'F'$ und $FC = F'C'$. (113.)

119. Hat man zwei Paare von Congruenzpunkten und verbindet die zu jedem Dreieck gehörigen, so sind je zwei entsprechende Durchschnittspunkte die-

ser Geraden mit den Dreiecksseiten oder deren Verlängerungen ebenfalls Congruenzpunkte. (Fig. 57.)

Beweis. Es ist nur $BF = B'F'$ zu erweisen. Da D und D' und E und E' Congruenzpunkte sind, so sind $\angle ADC \cong \angle A'D'C'$, $\angle AEC \cong \angle A'E'C'$ (alle drei Seiten gleich). Ferner ist $\angle DEC \cong \angle D'E'C'$ (zwei Seiten und der eingeschlossene Winkel gleich), ferner $\angle ECF \cong \angle E'C'F'$ (eine Seite und die anliegenden Winkel gleich), endlich $\angle FCB \cong \angle F'C'B'$ (zwei Seiten und der eingeschlossene Winkel gleich), woraus $BF = B'F'$ folgt.

120. Die Durchschnittspunkte gerader Linien, welche Congruenzpunkte verbinden, sind gleichfalls Congruenzpunkte (Fig. 58.)

Beweis. D, E, F, G seien Congruenzpunkte zu D', E', F', G' , es sollen auch H und H' solche sein. Es ist, wenn von D und G Lothe auf die Seiten gefällt werden, Viereck $BLDI \cong B'L'D'I'$ (109.) aus demselben Grunde $BOEP \cong B'O'E'P'$, $PNFQ \cong B'N'F'Q'$ und $BMGK \cong B'M'G'K'$. Hieraus ergeben sich leicht die noch fehlenden Seiten zum Beweise der Congruenz der Vierecke $FGKQ$, $DEBI$ und $GEPK$ mit den entsprechenden (103.); hieraus folgt aber $GE = G'E'$, $\angle HEG = \angle H'E'G'$, $HGE = H'G'E'$ und hieraus $\angle HEG \cong \angle H'E'G'$, welche Congruenz die noch fehlenden Stücke zur Congruenz von $HEPR$ mit dem entsprechenden Vierecke (109.) liefert. Aus letzterer folgt aber $HR = H'R'$. Aehnlich beweist man die Gleichheit der Abstände von den übrigen Seiten.

121. In jedem rechtwinkligen Dreiecke ist die Kathetensumme um die doppelte Länge des Perpendikels, welches man aus dem gemeinschaftlichen Durchschnittspunkte der die inneren Winkel halbirenden Linien auf eine der Seiten fällt, grösser als die Hypotenuse.

Beweis. Folgt unmittelbar aus 95, 2)

122. Wenn man in einem rechtwinkligen Dreiecke aus den vier Punkten, von denen jeder gleich weit von allen drei Seiten entfernt ist, auf die Seiten Perpendikel, und zwar aus dem Innern dieser

Punkte ein Perpendikel auf eine beliebige Seite, von jedem der drei äusseren aber auf diejenige Seite, welche von dieser Senkrechten (nicht ihrer Verlängerung) getroffen wird, so ist stets

1) jede Kathete um die Länge des innern Perpendikels grösser, als das auf sie gefällte äussere;

2) die Hypotenuse dagegen eben um die Länge dieses inneren Perpendikels kürzer als das auf sie gefällte äussere Perpendikel und daher

3) dieses äussere Hypotenusenperpendikel ebenso gross, als die beiden äusseren Kathetenperpendikel und das innere Perpendikel zusammengenommen (Fig. 59.)

Beweis. 1) Es soll $AB = EH + ID$ sein. Wir haben nur zu zeigen, dass $EH = BI$ ist. Leicht überzeugt man sich, dass $EBD = r$, und weil die Hälften der Winkel bei b und c im Urdreieck 45° betragen, auch $BDE = 45^\circ$, d. h. $\triangle BED$ gleichschenkelig ist. Nun ergiebt sich leicht $\triangle EBH \cong \triangle BID$ und hieraus $EB = BI$, w. z. b. w.

2) Zieht man noch $EO \perp BC$, so ist $\triangle OEC \cong \triangle LGC$, es ist nämlich BEC (s. vorher) $= 45^\circ$; $ECG = r$, folglich $\triangle ECG$ gleichschenkelig und also $EC = CG$, ferner $LGC = OCE$, weil beide den Winkel LGC zu einem Rechten ergänzen. Hieraus folgt $LG = OC = BC + OB$. Es ist aber $OB = BH = AI = DN$, folglich $LG = BC + DN$, w. z. b. w.

B) Es ist $BC = BI + MC = AB + AC - 2DN$, nach 1) aber $AB = EH + DN$, $AC = FK + DN$, folglich

$$\begin{aligned} BC &= EH + DN + FK + DN - 2DN \\ &= EH + FK, \end{aligned}$$

diess in 2) eingesetzt, giebt

$$LG = EH + FK + DN, \text{ w. z. b. w.}$$

II. Aufgaben.

123. Ein gleichschenkliges rechtwinkliges Dreieck zu construiren, wenn die Hypotenuse gegeben ist.

Auflösung. Man trage auf den Schenkeln eines rechten Winkels beliebige, aber gleiche Stücke ab, verbinde die Abtrag-

ungspunkte, trage darauf von einem Endpunkte aus die gegebene Hypotenuse ab, ziehe durch den Endpunkt des abgetragenen Stücks eine Parallele mit dem Schenkel des rechten Winkels, an dem die abgetragene Hypotenuse liegt, bis zum andern Schenkel und durch letzteren Durchschnittspunkt wieder eine Parallele mit der Hypotenuse des zuerst gebildeten Dreiecks. Die letztere Linie schneidet das verlangte Dreieck ab. (Die Richtigkeit der Lösung ergibt sich ohne Weiteres.)

124. Ein gleichschenkliges rechtwinkliges Dreieck zu construiren, wenn die Summe der Hypotenuse und der zugehörigen Höhe gegeben ist.

Auflösung. Man theile die gegebene Summe in drei gleiche Theile und construire mit zwei Drittheilen nach 123. als Hypotenuse ein gleichschenkliges rechtwinkliges Dreieck, das ist das verlangte.

Beweis. Die Höhe theilt das Dreieck in zwei gleichschenklige rechtwinklige Dreiecke, folglich ist sie halb so gross als die Hypotenuse.

125. Ein rechtwinkliges Dreieck zu construiren, in welchem der eine der spitzen Winkel doppelt so gross als der andere ist, wenn gegeben ist

- a) die Hypotenuse, oder
- b) die grössere Kathete, oder
- c) die kleinere Kathete.

Auflösungen. a) Nach 60. ist in einem solchen Dreiecke die Hypotenuse doppelt so gross als die kleinere Kathete und es ist also diese zur Construction mitgegeben.

b) Man construire ein beliebiges gleichseitiges Dreieck, trage auf dessen Höhe die gegebene Kathete vom Fusspunkte aus ab und ziehe durch den Abtragungspunkt eine Parallele mit einer an der Spitze liegenden Seite bis zur Grundlinie. Diese schneidet das verlangte Dreieck ab.

c) Verdoppelt man die kleinere Kathete, so hat man auch die Hypotenuse, und dann ist derselbe Fall wie bei a).

Beweise. Ergeben sich leicht mit Zuziehung von 60.

126. Ein rechtwinkliges Dreieck zu construiren, wenn der eine spitze Winkel doppelt so gross ist als der andere und der Umfang gegeben ist. (Fig. 60.)

Auflösung. Man trage an die gegebene Summe AB an einem Endpunkte einen Winkel $CAB = 45^\circ$ am andern $CBA = 30^\circ$ (wird erhalten, wenn man im gleichseitigen Dreiecke eine Höhe zieht) an, verlängere die nicht gemeinschaftlichen Schenkel bis zum Durchschnitt in c , fälle cd , errichte in der Mitte von cb das Loth ef und ziehe cf , so ist cdf das verlangte Dreieck.

Beweis. $\angle ADF$ sowohl als $\angle CFB$ sind gleichschenkelig, folglich $CD + DF + CF = AB$, ferner $DFC = 60^\circ$ als Aussenwinkel.

127. Ein Dreieck zu construiren, wenn zwei seiner Seiten gegeben sind, und in welchem die dritte Seite um eben so viel kleiner als die grössere der gegebenen Seiten ist, als sie selbst die kleinere übertrifft.

Auflösung. Nennen wir die kleinere der gegebenen Seiten a , die grössere b und die nicht gegebene x , so ist nach der Bestimmung

$$x - a = b - x, \text{ also}$$

$$2x = a + b$$

$$x = \frac{a + b}{2}.$$

Man hat deshalb nun aus a , b und $\frac{1}{2}(a + b)$ ein Dreieck zu construiren.

Zusatz. Die Auflösung der Aufgabe ist auch noch möglich, wenn $a = b$ ist; man erhält dann nämlich ein gleichseitiges Dreieck.

128. Eine gerade Linie so zu ziehen, dass sie mit einer gegebenen Geraden parallel und das zwischen den Schenkeln eines gegebenen Winkels enthaltene Stück derselben eine vorgeschriebene Länge hat.

Auflösung. Ist in der von 123. mit enthalten.

129. Wenn ein Winkel und ein beliebiger Punkt gegeben ist, durch letzteren eine Gerade so zu ziehen, dass die Stücke, welche durch sie von den Schenkeln (vom Scheitel aus gerechnet), abgeschnitten werden, von gleicher Grösse sind.

Auflösung. Man mache die Schenkel des gegebenen Winkels gleich, verbinde ihre Endpunkte und ziehe durch den gegebenen Punkt eine Parallele mit dieser Verbindungslinie bis zum Durchschnitt mit den Schenkeln oder dessen Verlängerungen.

130. Wenn zwei Punkte und eine Gerade gegeben sind, auf letzterer den Punkt zu finden, welcher gleich weit von den beiden gegebenen entfernt ist.

Auflösung. Man verbinde beide Punkte, errichte in der Mitte der Halbierungslinie auf ihr ein Loth und verlängere es bis zum Durchschnitt mit der Geraden. Der Durchschnittspunkt ist der verlangte. (Verbindet man ihn mit den beiden Punkten, so erhält man ein gleichschenkliges Dreieck. 35.)

Anmerkung. Die Auflösung ist unmöglich, wenn die Verbindungslinie der Punkte auf der gegebenen Geraden senkrecht steht.

131. Ein gleichschenkliges Dreieck zu construiren, wenn eine Seite und ein Höhenperpendikel gegeben sind. Gegeben können sein:

- a) die Grundlinie und zugehörige Höhe,
- b) ein Schenkel und die zugehörige Höhe,
- c) die Grundlinie und die zum Schenkel gehörige Höhe, und endlich
- d) ein Schenkel und die zur Grundlinie gehörige Höhe.

Auflösungen. a) Man errichte in der Mitte der gegebenen Grundlinie ein Loth gleich der gegebenen Höhe und verbinde dessen Endpunkt mit den Endpunkten der Grundlinie.

b) Man construire aus dem Schenkel als Hypotenuse und der Höhe als einer Kathete ein rechtwinkliges Dreieck, mache die an-

dere Kathete vom spitzen Winkel aus gleich der Hypotenuse und verbinde beider Endpunkte.

c) Man construire wieder aus den gegebenen Stücken ein rechtwinkliges Dreieck, wo die Grundlinie Hypotenuse ist, errichte in deren Mitte ein Loth, verlängere die nicht gegebene Kathete bis zum Lothe und verbinde den Durchschnittspunkt mit dem andern Endpunkte der Grundlinie.

d) Man construire aus den gegebenen Stücken wieder ein rechtwinkliges Dreieck, in welchem der Schenkel Hypotenuse ist, verlängere die nicht gegebene Kathete über den Scheitel des rechten Winkels hinaus um ihre eigene Länge und verbinde den Endpunkt der Verlängerung mit der noch nicht verbundenen Winkelspitze des rechtwinkligen Dreiecks.

132. Ein gleichschenkliges Dreieck zu construiren, wenn sein Umfang und einer seiner Winkel gegeben sind.

Auflösung. Man trage zu beiden Seiten des abgetragenen Umfangs die Hälfte des gegebenen Winkels (wenn er der Winkel an der Grundlinie werden soll) ab, verlängere die nicht gemeinschaftlichen Schenkel bis zum Durchschnitt und trage dort an erstere nach Innen zu diese Hälfte ebenfalls ab und verlängere die zuletzt gezogenen Schenkel bis zum abgetragenen Umfange. Zwischen ihnen liegt das verlangte Dreieck. (Ist der Winkel an der Spitze $= \alpha$ gegeben, so ist $\alpha = \frac{1}{2}\alpha$ der Winkel an der Grundlinie.)

Beweis. Aus ähnlichen Gründen wie in 126.

133. Ein gleichschenkliges Dreieck zu construiren, wenn sein Umfang und das Höhenperpendikel aus der Spitze auf die Grundlinie gegeben sind.

Auflösung. Man errichte in der Mitte des abgetragenen Umfangs ein Loth gleich der gegebenen Höhe, verbinde dessen Endpunkte mit den Endpunkten des Umfangs und trage die Winkel, welche letzterer mit jenen Verbindungslinien bildet, an diese im Zusammenstossungspunkte nach innen ab, u. s. w.

Beweis. Wie vorher.

134. Ein gleichschenkliges Dreieck zu construiren, wenn eines der Höhenperpendikel, die sich aus den Endpunkten der Grundlinie auf die Gegenschenkel fallen lassen, und einer seiner Winkel gegeben sind.

Auflösung. Man construire aus dem Perpendikel als einer Kathete und dem spitzen Winkel (wenn er an der Grundlinie liegen soll) ein rechtwinkliges Dreieck, verlängere die Hypotenuse um ihre eigene Länge über die gegebene Kathete hinaus, construire über dieser das vorige Dreieck in entgegengesetzter Lage (so nämlich, dass die gegebenen Katheten an einander stossen) und verlängere die nicht gegebenen Katheten bis zum Durchschnitt.

Beweis. Ergiebt sich unmittelbar aus der Construction.

135. Ein Quadrat zu construiren, wenn die Summe seiner Seite und Diagonale gegeben ist. (Fig. 37.)

Auflösung. Man trage an die gegebene Summe BE in B den Winkel $\angle EBC = \frac{1}{2}R$ und in E den Winkel $\angle BEC = \frac{1}{4}R$ an, verlängere die nicht gemeinschaftlichen Schenkel bis zum Durchschnitte in c, dann ist der kürzere bc die Seite des Quadrats.

Beweis. Ergiebt sich leicht aus der Construction.

136. Einen Rhombus zu construiren, wenn seine beiden Diagonalen gegeben sind.

Auflösung. Man mache die Schenkel eines rechten Winkels gleich den Hälften der gegebenen Diagonalen, verlängere jeden über den Scheitel hinaus um seine eigene Länge und verbinde die vier Abtragungspunkte.

Beweis. Folgt leicht aus I. §. 95^b. 4.

137. Ein Parallelogramm zu construiren, wenn seine beiden Diagonalen und eine Seite gegeben sind.

Auflösung. Man construire aus der Seite und den halben Diagonalen ein Dreieck, verlängere letztere um ihre eigenen Längen und verbinde die Abtragungspunkte sowohl unter sich als auch mit den Endpunkten der gegebenen Seite.

Beweis. Folgt aus I. §. 95^b. 1.

138. Ein gleichseitiges Dreieck zu construiren, wenn die Höhe desselben gegeben ist.

Auflösung. Man construire sich ein beliebiges gleichseitiges Dreieck, ziehe eine Höhe in demselben, trage darauf vom Fusspunkte aus die gegebene ab und ziehe durch den Abtragungspunkt Parallelen mit den an der Spitze liegenden Seiten bis zur Grundlinie oder deren Verlängerungen.

Beweis. Folgt aus der Gleichheit der Winkel des neuentstandenen Dreiecks mit dem erstconstruirten.

139. Ein Dreieck zu construiren, wenn zwei Seiten und die zur dritten gehörige Höhe gegeben sind.

Auflösung. Man errichte auf einer unbegrenzten Geraden ein Loth gleich der gegebenen Höhe, schlage aus dessen Endpunkte sowohl mit der einen als mit der andern Seite Kreisbögen bis zum Durchschnitt mit der unbegrenzten Geraden und verbinde die Durchschnittspunkte mit dem Endpunkte des Lothes.

Beweis. Dass die verlangten Stücke im erhaltenen Dreiecke sind, ergiebt sich aus der Construction.

Zusatz. Ist eine Seite kleiner als die Höhe, so giebt es gar kein Dreieck, welches der Aufgabe genügt; ist eine Seite gleich der Höhe, so giebt es ein solches; sind beide Seiten grösser als die Höhe, so giebt es zwei solche.

140. Ein rechtwinkliges Dreieck zu construiren, wenn die Hypotenuse und Summe der Katheten gegeben sind.

Auflösung. Man trage an die Kathetensumme in einem Endpunkte einen Winkel von 45^0 an, schlage vom andern Endpunkte aus mit der Hypotenuse einen Bogen bis zum Durchschnitt mit dem vorher gezogenen Winkelschenkel, ziehe daran den Radius und fälle von diesem Durchschnitte ein Loth auf die Kathetensumme. Zwischen ihm und dem Radius liegt das verlangte Dreieck.

Beweis. Das zweite gebildete rechtwinklige Dreieck ist gleichschenkelig u. s. w.

141. Ein rechtwinkliges Dreieck zu construiren, wenn die Hypotenuse und der Unterschied der beiden Katheten gegeben sind.

Auflösung. Ganz analog wie in 140., indem man an die gegebene Differenz den Winkel von 45^0 anträgt u. s. w.

142. Ein gleichschenkliges rechtwinkliges Dreieck zu construiren, wenn sein Umfang gegeben ist.

Auflösung. Man trage zu beiden Seiten des Umfanges (Fig. 37.) $EFC = FEC = \frac{1}{4}R$ an, ebenso an c die Winkel $DCE = FCB = \frac{1}{4}R$, dann ist BCD das verlangte Dreieck. (Vergl. 82.) Oder man construiere (Fig. 21.) über dem Umfange BC als Hypotenuse ein gleichschenkliges rechtwinkliges Dreieck, mache $CD = AC$, errichte $DE \perp BC$, so ist BDC das verlangte Dreieck.

143. Ein rechtwinkliges Dreieck zu construiren, wenn die Kathetensumme und ein spitzer Winkel gegeben sind.

Auflösung. Man trage auf der einen Seite der Kathetensumme den gegebenen, auf der andern einen Winkel von 45° an, verlängere die nicht gemeinschaftlichen Schenkel bis zum Durchschnitt und fälle von diesem ein Loth auf die Kathetensumme.

144. Ein rechtwinkliges Dreieck zu construiren, wenn der Kathetenunterschied und ein spitzer Winkel gegeben ist.

Auflösung. Ist der gegebene Winkel kleiner als 45° , so trage man an einem Endpunkte der gegebenen Kathetendifferenz den gegebenen Winkel und am andern Endpunkte den Winkel 45° an, doch so, dass die Verlängerung jener Differenz den einen Schenkel bildet. Vom Durchschnittspunkte der nicht gemeinschaftlichen Schenkel fällt man ein Loth auf die Verlängerung der Differenz.

Ist der gegebene Winkel $> 45^\circ$, so trägt man ihn da an, wo vorher 45° angetragen wurde und umgekehrt, u. s. w.

145. Zur Construction eines rechtwinkligen Dreiecks sind die Hypotenuse und die Differenz der spitzen Winkel gegeben.

Auflösung. Bezeichnen α und β die spitzen Winkel, so ist

$$\alpha - \beta = \delta \text{ gegeben, nun ist aber}$$

$$\alpha + \beta = \frac{1}{2}R$$

$$\text{folglich } \alpha = \frac{1}{2}(\frac{1}{2}R + \delta),$$

also auch bekannt, u. s. w.

146. Zur Construction eines rechtwinkligen Dreiecks sind die Kathetensumme und die Differenz der spitzen Winkel gegeben.

Auflösung. Mit Rücksicht auf vorige Auflösung nach 143.

147. Zur Construction eines rechtwinkligen Dreiecks sind die Differenz der Katheten und die ihrer Gegenwinkel gegeben.

Auflösung. Mit Rücksicht auf die Lösung von 145. nach 144.

148. Ein rechtwinkliges Dreieck zu construiren, wenn der Umfang und ein spitzer Winkel gegeben sind.

Auflösung. Man trage an den Umfang in einem Endpunkte die Hälfte des gegebenen Winkels und auf der andern Seite $\frac{1}{2}r$ an, fälle vom Durchschnitt der nicht gemeinschaftlichen Schenkel ein Loth auf den Umfang und trage daselbst auch noch die Hälfte des gegebenen Winkels an den zu diesem Winkel gehörigen Schenkel an.

149. Ein rechtwinkliges Dreieck zu construiren, wenn der Umfang und die Differenz der spitzen Winkel gegeben sind.

Auflösung. Mit Rücksicht auf 145. und 148.

150. Einen Rhombus zu construiren, wenn eine Seite und die Summe der beiden Diagonalen gegeben sind.

Auflösung. Da die Diagonalen sich im Rhombus rechtwinklig schneiden und mit der Summe auch deren Hälfte gegeben ist, so führt die Aufgabe auf 140. u. s. w.

151. Ein gleichschenkliges Dreieck zu construiren, in welchem jeder Winkel unter der Grundlinie anderthalbmal so gross ist, als der Winkel an der Spitze.

Auflösung. Nennen wir den noch unbekannten Winkel an der Spitze α , so überzeugt man sich leicht, wenn man die Höhe gezogen denkt, dass $\frac{3}{2}\alpha = r + \frac{1}{2}\alpha$ (als Aussenwinkel), d. h. also $\alpha = r$ werden muss.

152. Durch einen von drei gegebenen Punkten eine Gerade so zu ziehen, dass die Perpendikel, die auf sie aus den beiden anderen gefällt werden, gleiche Stücke auf ihr (vom erstern aus gerechnet) abschneiden.

Auflösung. Man verbinde den Punkt, durch den die Gerade gezogen werden soll, mit dem Mittelpunkte der Verbindungslinie der beiden andern und errichte auf dieser Linie im erstern Punkte ein Loth. Dieses ist die verlangte Linie.

Beweis. Folgt leicht aus II. §.

153. Durch einen innerhalb eines Winkels (BAC Fig. 61.) gegebenen Punkt (D) eine Gerade so zu ziehen, dass das zwischen den Schenkeln enthaltene Stück derselben in dem genannten Punkte halbart wird.

Auflösung. Man ziehe $DE \parallel AC$, mache $EF = AE$ und ziehe durch F und D die Gerade FG, so wird diese in D halbart.

Beweis. Folgt unmittelbar aus II. §, 43.

154. Ein gleichschenkliges Dreieck zu construiren, wenn seine beiden Höhenperpendikel gegeben sind.

Auflösung. Man errichte auf einer Geraden ein Loth gleich dem zur Grundlinie des gleichschenkligen Dreiecks gehörigen, beschreibe darüber als Hypotenuse und der Hälfte der zweiten gegebenen Höhe als Kathete auf jeder Seite rechtwinklige Dreiecke, doch so, dass die gegebenen Katheten am Fusspunkte des ersteren Lothes liegen. Zuletzt hat man noch die nicht gegebenen bis zur Geraden zu verlängern.

Beweis. Ergiebt sich mit Anwendung von II. §. 43.

155. Ein rechtwinkliges Dreieck zu construiren, wenn der Ueberschuss (d) der Kathetensumme über die Hypotenuse und einer der spitzen Winkel (α) gegeben ist.

Auflösung. Man trage (Fig. 59.) die Hälfte des gegebenen Ueberschusses (d) auf den Schenkeln eines rechten Winkels ab,

$\frac{1}{2}d = AI = AM$, errichte MD und ID auf den Schenkeln, ziehe von D an AC eine Gerade, welche die Hälfte des gegebenen Winkels, $\frac{1}{2}\alpha$, mit dieser Geraden einschliesst, $DCA = \frac{1}{2}\alpha$, trage nach $DCB = \frac{1}{2}\alpha$ an, so ist $\angle ABC$ das verlangte.

Beweis. Folgt aus 121.

156. Ein rechtwinkliges Dreieck zu construiren, wenn die Summe einer Kathete und des zur Hypotenuse gehörigen Höhenperpendikels nebst einem der spitzen Winkel gegeben ist.

Auflösung. Wir können immer annehmen, dass der gegebene Winkel an der zur gegebenen Summe gehörigen Kathete liegt, da im rechtwinkligen Dreieck mit dem einen spitzen Winkel auch der andere gegeben ist. Man betrachte die gegebene Summe als die der Hypotenuse und einer Kathete und construire hieraus und dem spitzen Winkel ein rechtwinkliges Dreieck, ähnlich wie in 135., nur dass $\frac{1}{2}\alpha$ statt $\frac{1}{4}R$ angetragen wird. Hierauf errichte man im Zusammenstossungspunkte der beiden Seiten, deren Summe gegeben war, auf der Hypotenuse ein Loth und verlängere die dem Fusspunkte gegenüberliegende Kathete bis zum Durchschnitt mit demselben. Hierdurch wird das verlangte Dreieck construirt.

Beweis. Ergiebt sich unmittelbar aus der Construction.

157. Ein rechtwinkliges Dreieck zu construiren, wenn der Ueberschuss einer Kathete über die zur Hypotenuse gehörige Höhe und ein spitzer Winkel gegeben ist.

Auflösung. Man construirt zuvor ein analoges Dreieck auf ganz entsprechende Weise wie vorher, indem man statt der Summe den Ueberschuss abträgt. Das Uebrige ist dann ganz wie in 156.

Beweis. Analog dem vorigen.

158. Ein Dreieck zu construiren, wenn ein Höhenperpendikel (h), der Unterschied der von ihm auf der Gegenseite gebildeten Segmente (d) und der grössere der dieser Seite anliegenden Winkel (α) gegeben sind.

Auflösung. Man construire aus h als Kathete und α als Gegenwinkel ein rechtwinkliges Dreieck; verlängere die andere Kathete über den Rechten hinaus, um ihre eigene Länge vermehrt, um die Differenz d und verbinde den Endpunkt der Verlängerung mit der gegenüberliegenden Winkelspitze des rechtwinkligen Dreiecks.

Beweis. Nennen wir die Abschnitte auf der Grundlinie a und a' , so ist $a' - a = d$ gegeben, a wird nun durch die Construction des rechtwinkligen Dreiecks gefunden, folglich ist $a' = a + d$.

Anmerkung. Wäre der kleinere anliegende Winkel gegeben, so würde man die Verlängerung der durch Construction des rechtwinkligen Dreiecks gefundenen Kathete gleich der Differenz zwischen ihr und der gegebenen Differenz machen.

159. Ein gleichschenkliges Dreieck zu construiren, wenn die Summe der Grundlinie und des Schenkels nebst einem seiner Winkel gegeben ist.

Auflösung. Da durch einen Winkel alle übrigen mit gegeben sind, so können wir den Winkel an der Grundlinie als gegeben betrachten. Ist α dieser Winkel und s die gegebene Summe, so trage man an s auf einer Seite α , auf der andern $\frac{1}{2}\alpha$ an, verlängere die gezogenen Schenkel bis zum Durchschnitt und trage daselbst an den grösseren nach Innen wieder $\frac{1}{2}\alpha$ an.

Beweis. Ergiebt sich sehr leicht.

160. Einen Rhombus zu construiren, wenn die Summe der Seite und einer Diagonale nebst einem der Winkel gegeben ist.

Auflösung. Aehnlich der vorigen, nur dass man auf einer Seite den gegebenen Winkel und auf der andern die Hälfte seines Nebenwinkels anträgt. Hierdurch erhält man eins der durch die Diagonale gebildeten Dreiecke.

Beweis. Aehnlich dem vorigen.

161. Einen Rhombus zu construiren, wenn die Summe seiner Diagonalen nebst einem der Winkel gegeben ist.

Auflösung. Da die halbe Diagonalensumme und der halbe Winkel ebenfalls gegeben sind, so wird man nach 143. eins der vier rechtwinkligen Dreiecke erhalten.

162. Ein Dreieck zu construiren, wenn ein Höhenperpendikel und sowohl Summe als Unterschied der beiden Segmente der zu ihm gehörigen Höhe gegeben sind, welche zwischen dem Fusspunkte des Perpendikels und den Endpunkten der Seite enthalten sind.

Auflösung. Ist h die gegebene Höhe, und ausserdem, wenn a und a' die Abschnitte auf der Grundlinie bezeichnen,

$$a + a' = s \text{ die gegebene Summe}$$

$$a - a' = d \text{ die gegebene Differenz,}$$

$$\text{so ist } a = \frac{1}{2}(s + d);$$

$$a' = \frac{1}{2}(s - d),$$

folglich sind von den beiden rechtwinkligen Dreiecken, die die Höhe bildet, zwei Katheten gegeben.

Anmerkung. Je nachdem man die rechtwinkligen Dreiecke auf einer Seite oder auf entgegengesetzten Seiten der Höhe construirt, erhält man ein an der Grundlinie spitzwinkliges oder daselbst stumpfwinkliges Dreieck. Die Aufgabe lässt also zwei Auflösungen zu. Wäre statt der Summe der Abschnitt der Gegenseite als gegeben zu betrachten, so würde es nur ein Dreieck ersterer Art geben können.

163. Ein gleichschenkliges Dreieck zu construiren, wenn die Summe seiner beiden Höhenperpendikel nebst einem seiner Winkel gegeben ist.

Auflösung. Ist BC die Grundlinie eines gleichschenkligen Dreiecks ABC (Fig. 62.), so ist, wenn $DE \perp AC$ gezogen ist, wie leicht zu ersehen, $DE = \frac{1}{2}BH$. Halbirt man noch AD in F und zieht FE , so ist $FE = AF = FD$, folglich ist $FD + DE$ die halbe Summe beider Höhen. Wäre der Winkel bei $A = \alpha$ gegeben, so würde auch $FDE = R - \frac{1}{2}\alpha$ gegeben sein. Somit wäre von dem gleichschenkligen Dreiecke FDE die Summe der Grundlinie und eines Schenkels ($FD + DE = \frac{1}{2}s$) und ein Winkel gegeben, wenn $AD + BG = s$ und $\angle BAC = \alpha$ gegeben wäre, und es könnte dasselbe nach 159. construirt werden. Wie nun hieraus das $\triangle ABC$ construirt werden kann, ist leicht zu ersehen. (Da $BG = 2DE$, so würde dies auch nach 134. geschehen können, oder auch nach 154.

164. Ein gleichseitiges Dreieck zu construiren, wenn die Summe der Seite und des Höhenperpendikels gegeben ist.

Auflösung. Man trage an die gegebene Summe einerseits 15^0 an und errichte im andern Endpunkte ein Loth bis zum Durchschnitt mit dem gezogenen Schenkel. In jenem Durchschnittspunkte trage man an diesen Schenkel wieder 15^0 an. Das zwischen der letztgezogenen Linie und dem Lothe enthaltene Dreieck ist eins der durch die Höhe im gesuchten Dreieck gebildeten.

Beweis. Vergl. 135. oder 156.

165. Ein gleichseitiges Dreieck zu construiren, wenn der Ueberschuss der Seite über das Höhenperpendikel gegeben ist.

Auflösung. Man trage (Fig. 63.) an die gegebene Differenz d in der bezeichneten Weise 75^0 an, errichte CA und mache $\angle DAB$ wieder $=75^0$, dann ist $\triangle ACB$ die Hälfte des gleichseitigen.

Beweis. Zunächst ergibt sich sofort $\angle ABC=30^0$; ferner folgt aus $(AB=BD.$ auch $AB-CB=d.$

166. Ein gleichschenkliges Dreieck zu construiren, wenn die Summe eines Schenkels und des zugehörigen Höhenperpendikels nebst einem der Winkel gegeben ist.

Auflösung. Ist (Fig. 62.) $AB+BG=s$ und $\angle BAC=\alpha$ gegeben, so construirt man $\triangle ABG$, da offenbar $\angle ABG=90^0-\alpha$ ist, ganz analog, wie in 164. angegeben ist, nur dass man statt 15^0 den Winkel $45^0-\frac{1}{4}\alpha$ anträgt. Das Uebrige ergibt sich dann leicht.

167. Ein Dreieck zu construiren, wenn eine Seite (a), die Summe der beiden anderen (s) und der von letztern eingeschlossene Winkel (α) gegeben sind.

Auflösung. Ergiebt sich leicht aus 92. und der dazu gehörigen Figur.

168. Ein Dreieck zu construiren, wenn eine Seite, der Unterschied der beiden anderen und der von letzteren eingeschlossene Winkel gegeben sind.

Auflösung. Ergiebt sich leicht aus der zu 93 gehörigen Figur.

169. Ein Dreieck zu construiren, wenn eine Seite (a) die Summe der beiden anderen (s) und einer der Gegenwinkel dieser letzteren (α) gegeben sind.

Auflösung. Man trägt an $BC=s$ (Fig. 64.) α an, macht $BA=a$, zieht AC und macht noch $DAC=ACD$, so ist ABD das verlangte Dreieck. (Ob der kleinere oder grössere Gegenwinkel gegeben sind, bleibt sich gleich.)

170. Ein Dreieck zu construiren, wenn eine Seite, der Unterschied der beiden anderen und der kleinere von den Gegenwinkeln dieser letzteren gegeben sind.

Auflösung. Leicht nach der zu 94. gehörigen Figur 42.

171. Ein Dreieck zu construiren, wenn eine Seite (a), der Unterschied der beiden anderen (d) und der grössere von den Gegenwinkeln dieser letzteren (β) gegeben sind.

Auflösung. Leicht nach der zu 96. gehörigen Figur 43; mit Berücksichtigung, dass $EC+BE=a$ und $EC-BE=2d$, folglich EC und BE bestimmt sind.

172. Ein Dreieck zu construiren, wenn eine Seite (a), die Summe der beiden anderen (s) und der Unterschied der Gegenwinkel dieser letzteren (δ) gegeben sind. (Fig. 45.)

Auflösung. Man mache $AB=a$, trage $\varphi=\frac{1}{2}\delta$ an, errichte $AE \perp AD$, mache $BE=s$ und trage $EAC=AEC$ an, so ist ABC das verlangte Dreieck.

Beweis. Dass $AC+BC=s$, ergiebt sich ohne Weiteres. Ferner ist

$$\begin{aligned}\alpha+\beta+2\gamma &= 2R \\ &= 2\gamma+2\beta+\delta; \\ \alpha-\beta &= \delta.\end{aligned}$$

173. Ein Dreieck zu construiren, wenn eine Seite (a) der Unterschied der beiden anderen (d) und der Unterschied der Gegenwinkel dieser letzteren (δ) gegeben sind. (Fig. 44.)

Auflösung. Man mache $AB=a$, trage $\angle BAD=\frac{1}{2}\delta$ an, mache $BD=d$, verlängere BD über D , trage $\angle DAC=\varphi$ an, dann ist ABC das verlangte Dreieck.

Beweis. Dass $BC-AC=d$, ergibt sich ohne Weiteres. Ferner ist

$$\begin{aligned}\varphi &= \frac{1}{2}\delta + \beta; \\ &= \alpha - \frac{1}{2}\delta; \\ \alpha - \beta &= \delta.\end{aligned}$$

174. In ein gleichseitiges Dreieck ein anderes ebenfalls gleichseitiges zu beschreiben, dessen Seiten einzeln senkrecht auf den Seiten des ersteren stehen. (Fig. 65.)

Auflösung. Man schneide auf den Seiten des Dreiecks gleichmässig den dritten Theil ab; mache also, wenn a die Seite ist, $AF=BD=CE=\frac{1}{3}a$ und verbinde die Punkte DEF , so ist $\triangle DEF$ das verlangte.

Beweis. Dass die Seiten des $\triangle DEF$ gleich sind, folgt leicht aus der Congruenz der drei äusseren Dreiecke; dass sie auf denen des Urdreiecks senkrecht stehen hingegen aus 60. Zus. b.

Zweiter Abschnitt.

Von dem Inhalte geradliniger Figuren.

I. Lehrsätze.

175. Zwei Dreiecke sind gleichflächig, wenn zwei Seiten des einen einzeln zweien Seiten des andern gleich sind, der eingeschlossene Winkel in dem einen Dreieck aber den entsprechenden im andern zu zwei Rechten ergänzt.

Beweis. Wenn man in einem Dreiecke eine der gegebenen Seiten über den Scheitel des gegebenen Winkels hinaus um ihre eigene Länge verlängert und den Endpunkt der Verlängerung mit der Gegenecke des Dreiecks verbindet, so wird offenbar das zweite Dreieck gebildet. Die Gleichheit beider folgt nun aus dem Satze: Dreiecke von gleicher Grundlinie und Höhe sind gleich. (I. §. 99^b. 2.)

Zusatz. Zu gleichen Seiten gehören in obigen Dreiecken auch gleiche Höhenabschnitte zwischen dem Fusspunkte der Höhe und den anderen gleichen Seiten.

176. Verbindet man in einem Paralleltrapez die Halbirungspunkte der beiden parallelen Seiten, so wird durch diese Gerade das Viereck halbirt. (Fig. 66.)

Beweis. Sind E und F die Halbirungspunkte, so ziehe man ED und EC, dann ist

$$\left. \begin{array}{l} AED = EBC \\ DEF = CEF \end{array} \right\} \text{ (I. §. 99^b. 2.) }$$

$$AEFD = BEFC, \text{ w. z. b. w.}$$

Anmerkung. Ist das Paralleltrapez ein Antiparallelogramm, so steht die Verbindungslinie senkrecht auf den parallelen Seiten.

177. Ein Paralleltrapez ist gleichflächig einem Parallelogramme, das mit ihm zwischen denselben Parallelen liegt und dessen Grundlinie gleich der Geraden ist, welche die Halbirungspunkte der beiden nicht parallelen Seiten verbindet. (Fig. 67.)

Beweis. Man ziehe durch E und F irgend ein Paar paralleler Linien, welche die parallelen Seiten oder deren Verlängerungen schneiden, dann folgt die Gleichheit des entstandenen $\parallel$ grs mit dem $\parallel$ Trapez aus $\triangle BGF \cong \triangle HFC$ und $\triangle KAE \cong \triangle DEI$.

178. Das aus zwei Seiten eines Dreiecks und dem eingeschlossenen Winkel beschriebene Parallelogramm ist gleichflächig dem Rechteck, welches man aus der dritten Dreiecksseite und der zugehörigen Höhe construirt.

Beweis. Folgt aus den beiden Sätzen: das Dreieck ist die Hälfte eines Parallelogramms von gleicher Höhe und Grundlinie (I. §. 99^b. 2.) und der Inhalt eines Dreiecks ist gleich dem halben Producte der Maasszahlen von Höhe und Grundlinie, versehen mit der der angewandten Längeneinheit entsprechenden Flächeneinheit. (II. §. 40. Zus. 3.)

179. Verbindet man die Spitze eines gleichschenkligen Dreiecks mit einem beliebigen Punkte auf der Grundlinie oder deren Verlängerung, so ist das Rechteck, das zu einer Seite die Summe dieser Verbindenden und des Schenkels, zur andern den Unterschied eben dieser Linien hat, gleich dem Rechteck aus den Segmenten der Grundlinie, die zwischen dem angenommenen Punkte und ihren Endpunkten enthalten sind. (Fig. 68.)

Beweis. Ist x die Höhe, so hat man

$$\begin{aligned} b^2 &= x^2 + [c + \frac{1}{2}(d-c)]^2 \\ &= x^2 + \frac{1}{4}(c+d)^2 \text{ oder} \\ b^2 &= x^2 + \frac{c^2}{4} + \frac{d^2}{4} + \frac{cd}{2} \dots (1). \end{aligned}$$

Ferner ist

$$\begin{aligned} a^2 &= x^2 + \left(\frac{d-c}{2}\right)^2 \\ &= x^2 + \frac{1}{4}(d-c)^2 \text{ oder} \\ a^2 &= x^2 + \frac{d^2}{4} + \frac{c^2}{4} - \frac{cd}{2} \dots (2). \end{aligned}$$

Subtrahiren wir (2) von (1), so erhalten wir

$$\begin{aligned} b^2 - a^2 &= cd, \text{ oder} \\ (b+a)(b-a) &= cd, \text{ w. z. b. w.} \end{aligned}$$

Anmerkung. Der zuletzt angewandte in van Swindens Elementen unter §. 81. aufgestellte Satz lässt sich auch leicht aus den Sätzen

$$\begin{aligned} (a+b)^2 &= a^2 + b^2 + 2ab \\ (a-b)^2 &= a^2 + b^2 - 2ab \end{aligned} \left\{ \begin{array}{l} \text{(I. §. 100^b. 1. und 2.)} \end{array} \right.$$

ableiten, denn $(a+b)^2 - (a-b)^2 = 4ab$ nach Subtraction;

substituiren wir $a+b=u$

$$a-b=v,$$

so erhält man

$$a = \frac{u+v}{2} \text{ und}$$

$$b = \frac{u-v}{2}, \text{ also}$$

$$\begin{aligned} u^2 - v^2 &= 4 \cdot \frac{u+v}{2} \cdot \frac{u-v}{2}, \text{ oder} \\ &= (u+v)(u-v). \end{aligned}$$

(Siehe auch Wiegand, Lehrbuch der allgem. Arithmetik. §. 50. Zus.)

180. Jedes Dreieck, welches in ein Parallelogramm, und zwar dergestalt beschrieben ist, dass höchstens eine seiner Ecken mit einer der Ecken des Parallelogramms zusammenfällt, ist kleiner als die Hälfte des Parallelogramms. (Fig. 69.)

Beweis. Ist AEF das Dreieck, so ist $\angle AEF < \angle AEB$, aber $\angle AEB = \angle ADB$ (gleiche Höhe und Grundlinie. I. §. 99^b. 2.) und $\angle ADB = \frac{1}{2} \parallel \text{gr. ABCD}$ (I. §. 99^b. 1.), folglich

$$\angle AEF < \frac{1}{2} \parallel \text{gr. ABCD, w. z. b. w.}$$

181. Wenn in einem Vierecke eins von den drei Paaren zugeordneter Seiten sich (nöthigenfalls verlängert) unter rechten Winkeln schneidet, so sind die Quadratsummen des zweiten und dritten Paares einander gleich.

Beweis. 1) Ist bei E (Fig. 70.) ein rechter Winkel, so ist

$$a^2 = x^2 + y^2$$

$$b^2 = (a+x)^2 + (v+y)^2$$

$$= u^2 + x^2 + 2ux + v^2 + y^2 + 2vy$$

$$a^2 + b^2 = u^2 + 2x^2 + 2ux + v^2 + 2y^2 + 2vy \dots (1)$$

$$c^2 = (u+x)^2 + y^2 = u^2 + x^2 + 2ux + y^2$$

$$d^2 = x^2 + (v+y)^2 = x^2 + v^2 + y^2 + 2vy$$

$$c^2 + d^2 = u^2 + 2x^2 + 2ux + v^2 + 2y^2 + 2vy \dots (2)$$

Die Vergleichung von (1) und (2) giebt

$$a^2 + b^2 = c^2 + d^2, \text{ w. z. b. w.}$$

2) Ist bei E (Fig. 71.) ein rechter Winkel, so ergibt sich der Satz noch einfacher ($a^2 + b^2 = c^2 + d^2$).

182. Schneiden sich in einem Vierecke alle drei Paare zugeordneter Seiten unter rechten Winkeln, so sind die Quadratsummen derselben alle unter einander gleich.

Beweis. Unmittelbare Folge vorigen Satzes.

183. Ist in einem Dreiecke einer der Winkel halb so gross als die Summe der beiden übrigen, so ist das Quadrat seiner Gegenseite um das Rechteck aus den beiden anderen Seiten kleiner, als die Summe der Quadrate eben dieser beiden anderen Seiten. ($a^2 = b^2 + c^2 - bc$. Fig. 72.)

Beweis. Zieht man die Höhe x, so hat man

$$a^2 = \left(c - \frac{b}{2}\right)^2 + x^2 \text{ nach 60.}$$

$$= c^2 + \frac{b^2}{4} - bc + b^2 \frac{b^2}{4}$$

$$= c^2 + b^2 - bc, \text{ w. z. b. w.}$$

183^b. Ist dagegen einer der Winkel doppelt so gross, als die Summe der beiden anderen, so ist das Quadrat seiner Gegenseite um das Rechteck aus den beiden anderen Seiten grösser als die Quadratsumme eben dieser beiden Seiten. $a^2 = b^2 + c^2 + bc$. Fig. 73)

Beweis. Ganz analog.

184. Hat man eine beliebige Gerade, zieht eine zweite, die auf ihr senkrecht steht, so ist der Unterschied der Quadrate aller der Linienpaare, die man von beliebigen Punkten der zweiten nach den beiden Endpunkten der ersten Geraden zieht, eine constante von der Lage des Punktes auf der zweiten Geraden unabhängige Grösse. (Fig. 73.)

Beweis. Ist 1. die erste, 2. die zweite Gerade, so ist nur zu zeigen, dass

$$a^2 - b^2 = \alpha^2 - \beta^2.$$

Es ist

$$a^2 = x^2 + y^2$$

$$b^2 = z^2 + y^2$$

$$a^2 - b^2 = x^2 - z^2;$$

$$\alpha^2 = x^2 + (y + w)^2$$

$$\beta^2 = z^2 + (y + w)^2$$

$$\alpha^2 - \beta^2 = x^2 - z^2,$$

folglich $a^2 - b^2 = \alpha^2 - \beta^2$, w. z. b. w.

185. Wenn man in einem Dreiecke die Halbierungspunkte zweier Seiten nicht nur unter einander verbindet, sondern auch von ihnen ein Paar beliebiger Parallelen nach der dritten Seite zieht, so ist das so entstandene Parallelogramm stets halb so gross als das Dreieck.

Beweis. Folgt leicht aus 12. mit Zuziehung von I. §. 99.

186. Zieht man in einem Paralleltrapez von dem Halbierungspunkte einer der nicht parallelen Seiten nach den Endpunkten der zweiten gerade Linien,

so ist das von denselben und der Vierecksseite gebildete Dreieck halb so gross als das Viereck. (Fig. 74.)

Beweis. Zieht man $FG \parallel AD$ und AG , so ist $\angle AED = \angle AGD = \frac{1}{2}AFGD = \frac{1}{2}ABCD$.

187. Zwei Dreiecke sind gleichflächig, wenn zwei Seiten des einen einzeln gleich zwei Seiten des andern sind, die dritte Seite des einen aber doppelt so gross ist als die Gerade, welche man aus dem Halbirungspunkte der dritten Seite des andern nach der Gegenecke zieht.

Beweis. Ist (Fig. 19.) E Mittelpunkt von BC und $ED = AE$ gemacht, so ist $\angle ECD \cong \angle ABC$, folglich $\angle ABC = \angle ACD$, w. z. b. w.

188. Halbirt man in einem Rechtecke alle vier Winkel und verlängert die Halbirenden bis zum gegenseitigen Durchschnitt, so ist das von ihnen gebildete Viereck stets ein Quadrat, dessen Flächeninhalt halb so gross ist als das Quadrat, welches den Ueberschuss der grösseren Rechtecksseite über die kleinere zur Seite hat. (Fig. 33.)

Beweis. Dass $EFGH$ ein Quadrat ist, ist bereits 77. bewiesen worden. Bezeichnen wir seine Seite mit x , die grössere Rechtecksseite mit a , die kleinere mit b , so ist nur noch zu zeigen, dass $x^2 = \frac{1}{2}(a-b)^2$. Es ist aber

$$a^2 = 2EB^2,$$

$$b^2 = 2BF^2, \text{ folglich}$$

$$a = EB\sqrt{2}$$

$$b = BF\sqrt{2}, \text{ folglich}$$

$$a - b = (EB - BF)\sqrt{2}.$$

$$(a - b)^2 = x^2 \cdot 2,$$

$$\frac{1}{2}(a - b)^2 = x^2, \text{ w. z. b. w.}$$

189. Halbirt man die Aussenwinkel eines Rechtecks und verlängert die Halbirenden bis zum gegenseitigen Durchschnitt, so ist das von ihnen gebildete Viereck ein Quadrat, dessen Inhalt halb so gross ist,

als das über der Summe der beiden Rechtecksseiten beschriebene Quadrat. (Fig. 33.)

Beweis. In 77. ist ebenfalls bewiesen worden, dass $ONLP$ ein Quadrat ist. Dass, wenn wir $ON=y$ setzen,

$$y^2 = \frac{1}{2}(a+b)^2$$

ist, wird ganz analog 188. bewiesen.

190. Beide Quadrate zusammen sind daher so gross als das Quadrat einer der Diagonalen des Rechtecks; der Ueberschuss des äusseren über das innere aber doppelt so gross als das gegebene Rechteck.

Beweis. Nach 188. ist

$$x^2 = \frac{1}{2}(a-b)^2 = \frac{1}{2}a^2 + \frac{1}{2}b^2 - ab,$$

$$\text{nach 189. } y^2 = \frac{1}{2}(a+b)^2 = \frac{1}{2}a^2 + \frac{1}{2}b^2 + ab$$

$$\hline x^2 + y^2 = a^2 + b^2 = d^2,$$

wenn d die Diagonale bezeichnet.

191. Wenn man eine gerade Linie halbt, über einer der Hälften als Hypotenuse ein gleichschenkliges rechtwinkliges Dreieck construirt und von dem Halbirungspunkte aus ein Stück gleich der Kathetenlänge abschneidet, so ist das Rechteck aus den beiden ungleichen Stücken der Geraden gleichflächig dem Quadrate des Stückes, welches zwischen den beiden Theilpunkten enthalten ist. (Fig. 75.)

Beweis. Setzen wir $AD=DC=EC=a$, $AC=CB=b$, so ist $AE=b-a$, und es ist also

$$EC^2 = AE \cdot EB \text{ oder}$$

$$a^2 = (b-a)(b+a)$$

zu erweisen. Es ist $a^2 + a^2 = b^2$ oder $a^2 = b^2 - a^2 = (b-a)(b+a)$ (179. Anmerkung.) w. z. b. w.

192. Zwei Dreiecke (ABC und DEF) sind gleichflächig, wenn ihre Grundlinien (BC und EF) auf derselben Geraden liegen und die Geraden (AE , AF DB DC), welche man von der Spitze eines jeden Dreiecks nach den Endpunkten der Grundlinie des andern zieht, einzeln unter sich parallel sind. ($AE \parallel DB$, $AF \parallel DC$. Fig. 76.)

Beweis. Soll $ABC = DEF$ sein, so müsste auch
 $AFC - ABF = DEB - DBF$, oder
 $AFD - ABF = DAB - DBF$, oder
 $AFD + DBF = DAB + ABF$ sein.

Diess ist aber der Fall, weil jede Seite der Gleichung das Viereck $ADBF$ bildet, folglich ist auch $ABC = DEF$, w. z. b. w.

193. Schneidet man auf den Seiten eines Dreiecks (ABC Fig. 77.) von den Ecken aus gleichmässig Stücke (AF, BD, CE) ab, von denen jedes gleich dem dritten Theile der Seite ist, auf der es abgeschnitten worden, und man verbindet die so erhaltenen Punkte (D, F, E) mit den Gegenecken, so sind die drei Dreiecke AFH, BDI, CEG zusammen, so gross als das mittlere Dreieck GHI .

Beweis. Es ist

$$\begin{aligned} 2\delta' + 2v' + 2\delta'' &= v' + \delta'' + \Delta + v'' \\ 2\delta'' + 2v'' + 2\delta''' &= v'' + \delta''' + \Delta + v''' \\ 2\delta''' + 2v''' + 2\delta' &= v''' + \delta' + \Delta + v', \\ \text{oder} \quad 2\delta' + v' + \delta'' &= \Delta + v'' \\ 2\delta'' + v'' + \delta''' &= \Delta + v''' \\ 2\delta''' + v''' + \delta' &= \Delta + v' \\ \hline 3\delta' + 3\delta'' + 3\delta''' &= 3\Delta \\ \delta' + \delta'' + \delta''' &= \Delta, \text{ w. z. b. w.} \end{aligned}$$

194. Halbirt man zwei Gegenseiten eines Vierecks und verbindet den Halbirungspunkt einer jeden mit den Endpunkten der andern Seite, so sind die beiden so entstandenen Dreiecke zusammen so gross als das Viereck. ($\Delta AEB + \Delta DFC = ABCD$. Fig. 78.)

Beweis. Setzen wir $ABCD = V$, so ist doch

$$\begin{aligned} V &= 2ADE + 2CBF \\ V &= 2BEC + 2AFD \end{aligned}$$

$$\hline V = ADE + BEC + FBC + AFD$$

folglich auch

$$V = DFC + AEB, \text{ w. z. b. w.}$$

Anmerkung. Dieser Satz ist eine Verallgemeinerung von 186.

195. In jedem Dreiecke haben die Geraden, welche die Halbirungspunkte der Seiten mit den Gegenecken verbinden, einen gemeinschaftlichen Durchschnittspunkt, und zwar so, dass das Stück jeder Verbindenden zwischen diesem Punkte und der Ecke doppelt so gross ist, als das andere (Fig. 79.)

Beweis. a) E und F seien Halbirungspunkte von AC und AB, es ist zu zeigen, dass AG verlängert CB in D halbt, d. h. dass $CD=BD$ ist. Es ist

$$\left. \begin{array}{l} \triangle AEB = \triangle CEB \\ \triangle AGE = \triangle EGC \end{array} \right\} \text{ (I. §. 99^b. 3.)}$$

$$\triangle ABG = \triangle CGB \dots (1.)$$

Ferner $\triangle AFG = \triangle BFG$

$$\triangle AFG = \triangle BFG$$

$$\triangle AGC = \triangle CGB \dots (2.),$$

also wegen (1) und (2)

$$\triangle ABG = \triangle AGC,$$

also auch nach I. §. 99^b. 10. und 3.

$$\triangle CDG = \triangle BGD$$

und deshalb nach I. §. 99^b. 10.

$$CD=BD, \text{ w. z. b. w.}$$

b) $\triangle EGF \sim \triangle CGB$, deshalb

$$FG:GC = EF:CB$$

$$= AE:AC$$

$$= 1:2, \text{ w. z. b. w.}$$

196. Fällt man von einem Punkte innerhalb eines Dreiecks Lothe auf dessen Seiten, so ist die Summe der Quadrate von drei solchen Seitenstücken, die keinen gemeinschaftlichen Endpunkt haben, gleich der Quadratsumme der drei übrigen. (Fig. 80.)

Beweis. Es ist zu beweisen, dass

$$a^2 + b^2 + c^2 = a'^2 + b'^2 + c'^2 \text{ ist.}$$

Verbindet man den Punkt D mit den Winkelspitzen, so hat man

$$\begin{aligned}
 AD^2 &= a^2 + GD^2 = c'^2 + DF^2 \\
 BD^2 &= b^2 + DE^2 = a'^2 + GD^2 \\
 DC^2 &= c^2 + DF^2 = b'^2 + DE^2 \\
 \hline
 a^2 + b^2 + c^2 &= a'^2 + b'^2 + c'^2, \text{ w. z. b. w.}
 \end{aligned}$$

Anmerkung. Der Punkt in der Ebene des Dreiecks kann irgend welche Lage haben, und also auch ausserhalb oder auf dem Umfange liegen.

197. Theilt man jede der Seiten eines Dreiecks in zwei solche Stücke, dass die Summe der Quadrate dreier nicht an einander grenzender gleich der Summe der Quadrate der drei übrigen ist, und errichtet auf den Seiten in diesen Theilpunkten Lothe, so haben diese bei hinreichender Verlängerung stets einen gemeinschaftlichen Durchschnittspunkt. (Fig. 80.)

Beweis. Es ist

$$AG^2 + BE^2 + CF^2 = GB^2 + EC^2 + FA^2 \dots (1).$$

Bewiesen soll werden, dass die in E, F, G errichteten Lothe sich in D schneiden. Es seien ED und FD die auf BC und AC errichteten Lothe, man fälle von D auf AB ein Loth DG', dann ist zu zeigen, dass g' mit G zusammenfällt. Nach vorigem Satze ist nun

$$AG'^2 + BE^2 + CF^2 = G'B^2 + EC^2 + FA^2 \dots (2.)$$

Subtrahiren wir (2) von (1), so erhalten wir:

$$AG^2 - AG'^2 = GB^2 - G'B^2 \text{ oder}$$

$$AG^2 - GB^2 = AG'^2 - G'B^2 \text{ oder}$$

$$(AG + GB)(AG - GB) = (AG' + G'B)(AG' - G'B),$$

$$\text{da aber } AG + GB = AG' + G'B, \text{ so ist auch}$$

$$AG - GB = AG' - G'B \text{ oder}$$

$$\text{nach Addition: } 2AG = 2AG'$$

$$AG = AG',$$

d. h. der Punkt g' fällt mit G zusammen, oder die drei Lothe haben einen gemeinschaftlichen Durchschnitt.

198. Beschreibt man über jeder der Seiten eines Dreiecks, und zwar abwärts von den beiden anderen, ein Quadrat, fällt von einem Punkte innerhalb des Dreiecks auf dessen Seiten Lothe und verlängert

sie, bis sie die Gegenecken des Quadrats schneiden, so ist von den sechs so entstandenen Rechtecken die Summe dreier nicht an einander grenzender gleich der Summe der drei übrigen. (Fig. 80)

Beweis. Es ist zu beweisen, dass
 $a(a+a') + b(b+b') + c(c+c') = a'(a+a') + b'(b+b') + c'(c+c')$
 ist. Nach 196. ist

$$a^2 + b^2 + c^2 = a'^2 + b'^2 + c'^2; \text{ addiren wir } \\ aa' + bb' + cc' = aa' + bb' + cc', \text{ so erhalten wir}$$

$$a(a+a') + b(b+b') + c(c+c') = a'(a+a') + b'(b+b') + c'(c+c'),$$

w. z. b. w.

Zusätze. a) Daher ist jede dieser Rechtecksummen halb so gross, als die Summe der Quadrate der drei Dreiecksseiten.

Beweis. Die Addition beider Seiten der letzten Gleichung führt auf

$$a^2 + a'^2 + 2aa' + b^2 + b'^2 + 2bb' + c^2 + c'^2 + 2cc' \\ = (a+a')^2 + (b+b')^2 + (c+c')^2.$$

b) Sind über den Seiten eines Dreiecks Quadrate beschrieben und jedes derselben durch eine auf der entsprechenden Dreiecksseite lothrechte Linie so in zwei Rechtecke getheilt, dass die Summe der drei nicht an einander grenzenden gleich der drei übrigen ist, so schneiden sich die drei Lothe Lothe in einem Punkte. (Fig. 80.)

Beweis. Die Lothe ED und DF mögen sich in D schneiden, man fälle DG' und zeige, dass G' mit G (dem Punkte der dritten Theilungslinie) zusammenfallen müsse. Voraussetzung ist:

$$a(a+a') + b(b+b') + c(c+c') = a'(a+a') + b'(b+b') + c'(c+c').$$

Jetzt muss nun nach dem Hauptsatze auch
 $AG'(a+a') + b(b+b') + c(c+c') = BG'(a+a') + b'(b+b') + c'(c+c')$
 sein. Subtrahiren wir, so ist

$$(a - AG')(a+a') = (a' - BG')(a+a'), \text{ oder}$$

$$a - AG' = a' - BG', \text{ oder}$$

$$a - a' = AG' - BG', \text{ da aber auch}$$

$$a + a' = AG' + BG'$$

$$\text{so ist: } 2a = 2AG', a = AG' \text{ u. s. w.}$$

199. Theilt man eine beliebige Gerade in drei beliebige Stücke, so ist das Rechteck aus der ganzen Linie und dem mittleren Stücke vermehrt um das Rechteck aus den beiden äusseren Stücken gleich dem Rechteck aus den beiden Stücken, von denen jedes zwischen einem der Endpunkte und dem entfernteren Theilpunkte liegt.

Beweis. Zu zeigen ist, wenn a, b, c die drei Stücke der Reihe nach sind, dass

$$(a+b+c)b+ac=(b+c)(a+b)$$

was sich ohne Weiteres ergibt.

200^a. Das Quadrat einer Seite im Dreieck ist gleich der Summe der Quadrate der beiden anderen, vermehrt oder vermindert um das doppelte Rechteck aus einer der letzteren Seiten in den durch ihre Höhe gebildeten Abschnitt — je nachdem der Gegenwinkel der ersteren Seite ein stumpfer oder ein spitzer ist. (Fig. 81.)

Beweis. 1) $a^2 = (c+x)^2 + y^2$
 $= c^2 + x^2 + y^2 + 2cx$
 $= b^2 + c^2 + 2cx$

2) $d^2 = y^2 + (e-x)^2$
 $= y^2 + x^2 + e^2 - 2ex$
 $= b^2 + e^2 - 2ex.$

(S. II. §. 55. Anmerk. 2) und 3.)

200^b. Wird eine der Seiten (BC) eines Dreiecks ABC in zwei solche Stücke (BD, DC) getheilt, dass die m fache Länge das einen (DC) gleich der n fachen Länge des andern (BD) ist, und man verbindet diesen Theilpunkt (D) mit der Gegenecke, so ist stets:

$$n \cdot AB^2 + m \cdot AC^2 = n \cdot BD^2 + m \cdot DC^2 + (m+n)AD^2.$$

Beweis. Man fälle auf BC das Loth AE, so ist nach 200^a.

$$AB^2 = AD^2 + BD^2 + 2BD \cdot ED \dots (I)$$

$$AC^2 = AD^2 + CD^2 - 2 \cdot DC \cdot ED; \text{ da aber}$$

m. DC = n. BD, oder

$$DC = \frac{n}{m} \cdot BC, \text{ so ist auch}$$

$$AC^2 = AD^2 + CD^2 - \frac{n}{m} \cdot 2BD \cdot ED, \text{ oder wegen (1.)}$$

$$AC^2 = AD^2 + CD^2 - \frac{n}{m} \cdot (AB^2 - AD^2 - BD^2)$$

$$m \cdot AC^2 = m \cdot AD^2 + m \cdot CD^2 - n \cdot AB^2 + n \cdot AD^2 + n \cdot BD^2$$

$$m \cdot AC^2 + n \cdot AB^2 = n \cdot BD^2 + m \cdot CD^2 + (m+n) AD^2; \text{ w. z. b. w.}$$

201. Schneidet man von zwei Gegenecken eines beliebigen Parallelogramms aus auf den von ihnen auslaufenden Seiten beliebige Stücke so ab, dass je zwei, die auf parallelen Seiten genommen werden, gleich sind, und verbindet diese vier Durchschnittspunkte, so ist das so entstandene Parallelogramm gleichflächig mit dem Parallelogramme, welches entsteht, wenn man dieselben Stücke auf dieselbe Weise von den beiden anderen Gegenecken abschneidet.

Beweis. Nimmt man von dem ursprünglichen Parallelogramme jedesmal die 4 an den Ecken liegenden Dreiecke, die in dem einen Falle denen im andern nach 175. gleich sind, weg, so bleiben gleiche Reste.

Anmerkung. Beim Quadrat und Rechteck sind die entstandenen Parallelogramme congruent,

202. Beschreibt man über jeder Seite eines beliebigen Dreiecks abwärts von den beiden anderen ein Quadrat und verbindet die Endpunkte je zweier von derselben Ecke des Dreiecks auslaufender Quadratseiten, so sind die Dreiecke, welche diese Verbindenden mit den genannten Quadratseiten bilden, stets unter einander und mit dem Urdreiecke gleichflächig. (Fig. 82.)

Beweis. Die Winkel der drei äusseren Dreiecke, die von Quadratseiten eingeschlossen werden, ergänzen die entsprechenden

des inneren, mit denen sie eine gemeinschaftliche Spitze haben, zu 180° , folglich sind sämmtliche Dreiecke nach 175. gleich.

203. Errichtet man auf zwei Seiten (AB, AC, Fig. 82.) eines beliebigen Dreiecks (ABC) in ihrem gemeinschaftlichen Endpunkte Lothe (AH, AG), macht sie an Länge gleich den Dreiecksseiten, auf welchen sie senkrecht stehen, und verbindet ihre Endpunkte (G, H), so ist das Quadrat dieser Verbindenden (GH) und das Quadrat der dritten Dreiecksseite (BC) zusammen doppelt so gross als die Summe der Quadrate der beiden genannten Dreiecksseiten.

Beweis. Wendet man 200^a. auf beide Dreiecke an und addirt die erhaltenen Gleichungen, so kommt man mit Rücksicht auf 175. Zus. auf die Behauptung.

204. Construiert man über den im vorvorigen Satze näher bezeichneten Verbindungslinien (EF, HG, DI, Fig. 82.) Quadrate, so ist die Summe derselben dreimal so gross, als die Summe der über den Seiten des Urdreiecks (ABC) beschriebenen Quadrate.

Beweis. Man wendet auf alle drei Verbindungslinien 203. an und addirt die erhaltenen Gleichungen, so kommt man unmittelbar auf die Behauptung.

205. Auch die Dreiecke DEK, DEL, GFM, GFN, OHI, HIP sind unter einander und dem Urdreiecke gleichflächig. (Fig. 82.)

Beweis. Folgt unmittelbar nach Anwendung von 175. u. 202.

206. Daher sind die Vierecke KDEI, GFMN und HIPO Paralleltrapeze. (Fig. 82.)

Beweis. Folgt unmittelbar aus der Gleichheit der Höhen zweier ein solches Viereck bildenden Dreiecke (I. §. 99^b. 10.)

207. Jedes der vorerwähnten Paralleltrapeze ist fünfmal so gross als das Urdreieck; alle drei sind also unter einander gleichflächig. (Fig. 82.)

Beweis. Man mache $GQ=GF$ und trage auch noch $FR=rs=GF$ ab, ziehe NQ, MR, MS . Liesse sich nun zeigen, dass $NMSQ$ ein $\parallel$ gr, also NM auch $=4GF$ wäre, so würde $\angle NFM=4\angle ABC$ und also $\angle NFM+\angle NGF=NMFG=5\angle ABC$ folgen. Man beweise zu diesem Ende $\angle NGQ \cong \angle HGA$, daraus folgt $W. NQG = W. HAG$, ferner $\angle FRM \cong \angle FCE$, woraus dann auch leicht folgt $\angle MRS \cong \angle ABC$, und also $W. MSR = W. BAC$. Da nun $W. HAG + W. BAC = 2R = W. NQG + W. MSR$, so ist $MS \parallel NQ$ (I. §. 49. c)) und also $NMFG$ ein $\parallel$ gr u. s. w.

208. Jede der drei Geraden KL, MN, OP ist gleich dem Umfange der über den Seiten des Urdreiecks beschriebenen Quadrate (Fig. 82.)

Beweis. Ergiebt sich unmittelbar mit aus dem Beweise des vorigen Satzes.

209. Beschreibt man über den genannten Linien KL, MN, OP (Fig. 82.) wieder Quadrate, so ist die Summe derselben viermal so gross, als die über den Seiten des Urdreiecks und die über den Verbindungslinien EF, GH, DI construirten sechs Quadrate zusammen genommen.

Beweis. Es ist

$$NM^2 + KL^2 + OP^2 = 16(AB^2 + AC^2 + BC^2)$$

und nach 203.

$$AB^2 + BC^2 + AC^2 + FE^2 + DI^2 + HG^2 = 4(AB^2 + AC^2 + BC^2).$$

210. Wenn man über jeder Seite eines Vierecks ($ABCD$ Fig. 83.) abwärts von den übrigen ein Quadrat beschreibt und die Endpunkte von zwei solchen Seiten derselben verbindet, die von derselben Ecke des Vierecks auslaufen, so ist die Summe von zwei gegenüberliegenden Dreiecken (AEM, CHI) gleich der Summe der beiden anderen (FBG, LDK).

Beweis. Zieht man noch die Diagonale AC , so ist nach 175.

$$\angle LDK = \angle ADC$$

$$\angle FBG = \angle ABC$$

$$\angle LDK + \angle FBG = \angle ABC + \angle ADC = \angle ABCD \text{ u. s. w.}$$

211. Beschreibt man über jeder Seite eines Vierecks, in welchem beide Diagonalen gleich sind, abwärts von den übrigen ein Quadrat, verbindet die Endpunkte je zwei solcher Quadratseiten, die von derselben Vierecksspitze auslaufen und beschreibt über diesen vier Verbindenden wiederum Quadrate, so sind zwei gegenüberliegende zusammen so gross als die beiden anderen. (Fig. 83.)

Beweis. Denken wir uns $AC = DB$, so folgt der Satz mit Leichtigkeit durch Anwendung von 203.

212. Zwei in ihren Winkeln übereinstimmende Parallelogramme ($ABCD, EFGH$, Fig. 84.) sind gleichflächig, wenn ihre Grundlinien (AB, EF) auf derselben Geraden liegen und die beiden Linien (EL, AK) parallel sind, welche die Durchschnittspunkte der Gegenseiten des einen Parallelogramms mit den ihnen nicht parallelen Gegenseiten des andern gleichmässig verbinden.

Beweis. Man ergänze das $\parallel$ gr. $ABKM$ und ziehe noch NO , dann lässt sich leicht zeigen, dass $\parallel$ gr $AN = \parallel$ gr EG ($\angle ALO \cong \angle EIF$); dann ist

$$\begin{aligned} \parallel \text{ gr } BL &= \parallel \text{ gr } DN \\ &= \parallel \text{ gr } AN - \parallel \text{ gr } DO \\ &= \parallel \text{ gr } EG - \parallel \text{ gr } DO, \text{ folglich} \\ \parallel \text{ gr } DB &= \parallel \text{ gr } EG, \text{ w. z. b. w.} \end{aligned}$$

213. Zwei Parallelogramme ($ABCD, EFGH$, Fig. 85.) sind gleichflächig, wenn nicht nur ihre Seiten einzeln parallel sind, sondern auch die beiden Geraden (IK, LM) parallel laufen, welche die Durchschnittspunkte der Gegenseiten des einen Parallelogramms mit den ihnen nicht parallelen Gegenseiten des andern verbinden.

Beweis. Man ziehe $GP \parallel LM$ und ergänze die Figur in der

leicht zu übersehenden Weise, dann ist $\parallel \text{gr } oq = \parallel \text{gr } ac$. Nun ist aber $\parallel \text{gr } oq = \parallel \text{gr } hf$ nach 212, folglich auch $\parallel \text{gr } ac = \parallel \text{gr } hf$, w. z. b. w.

214. Fällt man aus einem beliebigen Punkte in der Ebene eines Dreiecks auf dessen Seiten oder deren Verlängerungen Senkrechte, verbindet drei beliebige auf denselben angenommene Punkte zu einem Dreiecke und fällt auf dessen Seiten aus den Ecken des Urdreiecks Senkrechte, so haben auch diese bei hinreichender Verlängerung stets einen gemeinschaftlichen Durchschnittspunkt (Fig. 85^b.)

$$\text{Beweis. } a^2 = \alpha^2 + m^2 - q^2$$

$$b^2 = \beta^2 + n^2 - r^2$$

$$c^2 = \gamma^2 + p^2 - s^2$$

$$a^2 + b^2 + c^2 = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + m^2 + n^2 + p^2 - q^2 - r^2 - s^2 \dots (1.)$$

$$a'^2 = \beta'^2 + n^2 - q^2$$

$$b'^2 = \gamma'^2 + p^2 - r^2$$

$$c'^2 = \alpha'^2 + m^2 - s^2$$

$$a'^2 + b'^2 + c'^2 = \alpha'^2 + \beta'^2 + \gamma'^2 + m^2 + n^2 + p^2 - q^2 - r^2 - s^2 \dots (2.)$$

Nun ist nach 196.

$a^2 + b^2 + c^2 = a'^2 + b'^2 + c'^2$, folglich auch $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = \alpha'^2 + \beta'^2 + \gamma'^2$ und deshalb haben nach 197. die Lothe m , n und p einen gemeinschaftlichen Durchschnittspunkt, w. z. b. w.

215^a. Das Quadrat über der von der Spitze eines Dreiecks nach der Mitte der Grundlinie gezogenen Transversale ist gleich der halben Summe der Quadrate über den beiden anderen Seiten, vermindert um das Quadrat über der halben Grundlinie. (S. II. §. 79. 2.)

Beweis. Nach 200^a. ist (Fig. 86.)

$$b^2 = t^2 + \frac{1}{4}c^2 + cy$$

$$a^2 = t^2 + \frac{1}{4}c^2 - cy$$

$$a^2 + b^2 = 2t^2 + \frac{1}{2}c^2$$

$$\frac{1}{2}(a^2 + b^2) = t^2 + \frac{1}{4}c^2, \text{ w. z. w.}$$

Wiegand, Samml. geometr. Lehrsätze u. Aufgaben.

215^b. In jedem beliebigen Vierecke ist die Summe der Quadrate von zwei Paaren zugeordneter Seiten gleich der Quadratsumme des dritten Paares vermehrt um das vierfache Quadrat der Linie, welche die Halbierungspunkte eben dieses dritten Seitenpaares verbindet. (Fig. 87.)

Beweis. Man ziehe x und y , dann ist nach 215^a.

$$x^2 = \frac{1}{2}(a^2 + b^2) - \frac{1}{4}e^2$$

$$y^2 = \frac{1}{2}(c^2 + d^2) - \frac{1}{4}e^2$$

$$x^2 + y^2 = \frac{1}{2}(a^2 + b^2 + c^2 + d^2 - e^2)$$

$$\frac{1}{2}(x^2 + y^2) = g^2 + \frac{1}{4}f^2$$

$$x^2 + y^2 = 2g^2 + \frac{1}{2}f^2$$

$$2g^2 + \frac{1}{2}f^2 = \frac{1}{2}(a^2 + b^2 + c^2 + d^2 - e^2)$$

$$4g^2 + f^2 + e^2 = a^2 + b^2 + c^2 + d^2, \text{ w. z. b. w.}$$

(Der andere Fall wird ganz ähnlich bewiesen.)

Zusätze. a) In jedem Parallelogramm ist die Quadratsumme aller vier Seiten gleich der Quadratsumme der Diagonalen.

b) Die Quadratsumme der Diagonalen ist ein Grösstes (Maximum), wenn $g=0$ ist, d. h. wenn die Diagonalen einander halbiren, die Figur also ein $\parallel$ gr ist.

216. Schneidet man von der Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks von ihren Endpunkten aus Stücke ab, welche gleich den Katheten sind, so ist das Quadrat der Linie, welche zwischen diesen Abtragungspunkten liegt, doppelt so gross als das Rechteck aus den Ueberschüssen der Hypotenuse über die eine und andere Kathete. (Fig. 88.)

Beweis. Es ist $\alpha + x = a$, $\beta + x = b$, folglich

$$(\alpha + x^2) + (\beta + x)^2 = (\alpha + \beta + x)^2$$

$$\alpha^2 + x^2 + 2\alpha x + \beta^2 + x^2 + 2\beta x = \alpha^2 + \beta^2 + x^2 + 2\alpha\beta + 2\alpha x + 2\beta x$$

$$x^2 = 2\alpha\beta; \text{ w. z. b. w.}$$

217. Fällt man in einem rechtwinkligen Dreiecke von dem gemeinschaftlichen Durchschnittspunkte der die Winkel halbirenden Linien eine Senkrechte auf eine der Seiten, so ist das Quadrat derselben halb

so gross als das Rechteck aus den Ueberschüssen der Hypotenuse über die eine und andere Kathete. (Fig. 89.)

Beweis. $c = a - r + b - r$

$$2r = a + b - c$$

$$4r^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab - 2ac - 2bc$$

$$= 2c^2 + 2ab - 2ac - 2bc$$

$$r^2 = \frac{1}{2}(c^2 + ab - ac - bc)$$

$$= \frac{1}{2}(c - a)(c - b), \text{ w. z. b. w.}$$

218. Verbindet man die Halbierungspunkte der Seiten eines Dreiecks mit den Gegenecken, so ist die vierfache Summe der Quadrate dieser Linien gleich der dreifachen Summe der Quadrate der Dreiecksseiten (Fig. 90.)

Beweis. Nach dreimaliger Anwendung von 215^a. ergibt sich

$$m^2 + n^2 + p^2 = \frac{3}{4}(a^2 + b^2 + c^2), \text{ w. z. b. w.}$$

219. Wenn man jede der Katheten eines rechtwinkligen Dreiecks über jeden ihrer Endpunkte hinaus um ihre eigene Länge verlängert und jeden der Endpunkte mit der Gegenecke verbindet, so ist die Summe der Quadrate dieser vier Verbindenden siebenmal so gross als das Quadrat der Hypotenuse. (Fig. 91.)

Beweis.

$$d^2 = a^2 + 4b^2$$

$$e^2 = 4a^2 + b^2$$

$$f^2 = a^2 + b^2$$

$$g^2 = a^2 + b^2$$

$$d^2 + e^2 + f^2 + g^2 = 7(a^2 + b^2) = 7c^2, \text{ w. z. b. w.}$$

220. Verlängert man die Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks über jeden ihrer Endpunkte hinaus um ihre eigene Länge, und verbindet diese beiden Endpunkte mit der Spitze des rechten Winkels, so ist die Summe der Quadrate der Verbindenden fünfmal so gross als das Quadrat der Hypotenuse. (Fig. 92.)

$$\begin{array}{rcl} \text{Beweis.} & m^2 = a^2 + c^2 + 2cx & \\ & n^2 = b^2 + c^2 + 2c(c-x) & (200^a.) \\ \hline & m^2 + n^2 = a^2 + b^2 + 2c^2 + 2cx - 2cx & \\ & = 2a^2 + 2b^2 + 2c^2 & \\ & = 2(a^2 + b^2 + c^2) & \\ & = 2 \cdot 5c^2, \text{ w. z. b. w.} & \end{array}$$

221. Wenn zwei Dreiecke ABC und ADE (Fig. 93.) eine gemeinschaftliche Spitze A und zwei Grundlinien (BC, DE) haben, die gleich und parallel sind, so ist die algebraische Summe ihrer Flächen halb so gross, als das durch die Grundlinien bestimmte Parallelogramm.

$$\begin{array}{rcl} \text{Beweis.} & ABC = \frac{1}{2} || \text{gr BN} & ABC = \frac{1}{2} || \text{gr OP} \\ & ADE = \frac{1}{2} || \text{gr DN} & ADE = \frac{1}{2} || \text{gr OE} \\ \hline & ABC - ADE = \frac{1}{2} || \text{gr BE}; & ABC + ADE = \frac{1}{2} || \text{gr BE.} \end{array}$$

222. Nimmt man ausserhalb eines Parallelogramms einen beliebigen Punkt und verbindet denselben mit den Ecken der Figur, so ist das Dreieck, welches durch zwei dieser Verbindenden und eine der Diagonalen gebildet wird, gleich der algebraischen Summe der beiden Dreiecke, welche auf ähnliche Weise durch je zwei jener Verbindenden und zwei solche Seiten des Parallelogramms gebildet werden, welche von demselben Endpunkte der Diagonalen auslaufen. (Fig. 94.)

Beweis. Bezeichnen wir $|| \text{gr ABCD}$ der Kürze wegen blos durch $|| \text{gr}$, so ist für die Diagonale BD:

$$\begin{array}{rcl} EDC - \frac{1}{2} || \text{gr} = EAB & E'DC - \frac{1}{2} || \text{gr} = E'AB & (221.) \\ EBC = EBC & E'BC = E'BC & \\ \hline EBD = EAB + EBC & E'BD = E'AB + E'BC. & \end{array}$$

Für die Diagonale AC haben wir:

$$\begin{array}{rcl} EDC - \frac{1}{2} || \text{gr} = EAB & E'DC - \frac{1}{2} || \text{gr} = E'AB & (221.) \\ EAD = EAD & E'AD = E'AD & \\ \hline EAD = EAB - EAD; & E'AC = E'AB + E'AD. & \end{array}$$

Zusatz. Der Satz bleibt auch noch richtig, wenn der Punkt innerhalb des Parallelogramms angenommen wird.

223. Nimmt man ausserhalb oder innerhalb eines beliebigen Parallelogramms einen beliebigen Punkt und verbindet ihn mit dessen Ecken, so ist a) die Summe der beiden von den sechs so entstehenden Dreiecken, welche die Diagonalen zu Seiten haben, gleich der algebraischen Summe der beiden Dreiecke, welche das eine Paar von Gegenseiten zu Grundlinien haben, und b) der Unterschied jener beiden Diagonaldreiecke gleich der algebraischen Summe der beiden Dreiecke, welche das andere Paar von Gegenseiten zu Grundlinien haben. (Fig. 94.)

$$\text{Beweis. a) } \left. \begin{array}{l} EBD = EAB + EBC \\ EAC = EAB - EAD \end{array} \right\} (222.)$$

$$\begin{aligned} EAC + EBD &= EAB + EAB + EBC - EAD \\ &= EAB + EAB + \frac{1}{2} \text{GrAC} \\ &= EAB + EDC \end{aligned} \quad (221.)$$

$$\text{b) } \left. \begin{array}{l} EBD = EAB + EBC \\ EAC = EAB - EAD \end{array} \right\}$$

$$EBD - EAC = EBC + EAD.$$

224. Wenn man in einem Paralleltrapez die die Halbierungspunkte der beiden nicht parallelen Seiten verbindet und dann einen beliebigen Punkt der so erhaltenen Geraden mit den vier Ecken der Figur, so ist die Summe zweier Gegendreiecke gleich der Summe der beiden anderen. (Fig. 95.)

Beweis. Nach I. §. 99^b. 7. ist

$$\angle AEG + \angle DGF + \angle BEG + \angle GFC$$

gleich einem Parallelogramme, welches die halbe Höhe des Trapezes zur Höhe und 2. EF zur Grundlinie hat. In gleicher Weise ist

$$\angle ADG + \angle BGC$$

gleich einem Parallelogramme, welches die vorige Höhe und

$$AD + BC$$

zur Grundlinie hat. Da nun, wie sich leicht zeigen lässt,

$$2. EF = AD + BC$$

ist, so folgt daraus

$$\angle ADG + \angle BGC = \angle AGB + \angle DGC, \text{ w. z. b. w.}$$

Anmerkung. Dieser Satz ist eine Erweiterung von 186.

Zusatz. Wird (Fig. 95.) der Punkt g' auf der Verlängerung von EF gewählt, so ist

$$\angle ADG' + \angle BG'C = \angle AG'B - \angle DG'C.$$

225. Wenn in einem Parallelogramm ($ABCD$, Fig. 96.) eine der Diagonalen (AC) von gleicher Länge mit einem Paare Gegenseiten (AB, CD) ist, so ist die Summe der Quadrate der beiden anderen Gegenseiten (AD, BC) und eben dieser Diagonale gleich dem Quadrate der andern Diagonale (BD).

Beweis. Nach 200^a. ist

$$BD^2 = AB^2 + AD^2 + 2 \cdot AD \cdot x$$

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2 \cdot BC \cdot x$$

$$BD^2 + AC^2 = AB^2 + AB^2 + AD^2 + BC^2$$

$$(BD^2 = AC^2 + AD^2 + BC^2, \text{ w. z. b. w.})$$

226. In jedem Paralleltrapez ist die Summe der Quadrate beider Diagonalen gleich der Summe der Quadrate der beiden nicht parallelen Seiten vermehrt um das doppelte Rechteck aus den beiden parallelen Seiten (Fig. 97.)

Beweis. $m^2 = a^2 + d^2 - 2dx$

$$n^2 = a^2 + c^2 + 2cx$$

$$m^2 + n^2 = a^2 + a^2 + d^2 + c^2 + 2(c-d)x$$

$$b^2 = a^2 + (c-d)^2 + 2(c-d)x$$

$$m^2 + n^2 - b^2 = a^2 + d^2 + c^2 - (c-d)^2$$

$$m^2 + n^2 = a^2 + b^2 + 2cd, \text{ w. z. b. w.}$$

227. Schneidet man auf jeder Seite eines Dreiecks (ABC , Fig. 98.) von jedem ihrer Endpunkte aus den n ten Theil ihrer eigenen Länge ab, so ist die Summe der Quadrate von der einen Ternion der Linien, welche diese Durchschnittspunkte mit den Gegenecken verbinden (AD, BE, CF) gleich der Summe der Quadrate der andern Ternion (AG, BH, CI).

Beweis. Nach 200^b. ist

$$BC^2 + (n-1)AB^2 = HC^2 + (n-1)AH^2 + n.BH^2$$

$$AB^2 + (n-1)AC^2 = BG^2 + (n-1)GC^2 + n.AG^2$$

$$AC^2 + (n-1)BC^2 = AI^2 + (n-1)BI^2 + n.CI^2.$$

Ferner $AB^2 + (n-1)BC^2 = HC^2 + (n-1)AH^2 + n.BE^2$

$$AC^2 + (n-1)AB^2 = BG^2 + (n-1)GC^2 + n.AD^2$$

$$BC^2 + (n-1)AC^2 = AI^2 + (n-1)BI^2 + n.CF^2.$$

Durch Addition kommt man sofort auf

$$BH^2 + AG^2 + CI^2 = BE^2 + AG^2 + CI^2, \text{ w. z. b. w.}$$

228. Verlängert man die Seiten eines Dreiecks (ABC, Fig. 99.) gleichmässig, jede um die Hälfte ihrer eigenen Länge und verbindet sowohl die Endpunkte (D, E, F) dieser Verlängerungen, als auch die Halbierungspunkte (G, H, I) der Seiten selbst mit den Gegenecken, so ist der Ueberschuss der Quadratsumme der ersten Ternion von Linien (AH, BF, CD) über die Quadratsumme der zweiten (AH, BI, CG) gleich der Summe der Quadrate der Dreiecksseiten.

Beweis. Nach 200^b. ist

$$2AB^2 + AE^2 = 2BH^2 + HE^2 + 3AH^2$$

$$= \frac{1}{2}BC^2 + BC^2 + 3AH^2$$

$$= \frac{3}{2}BC^2 + 3AH^2, \text{ also}$$

$$4AB^2 + 2AE^2 = 3BC^2 + 6AH^2, \text{ und analog}$$

$$4BC^2 + 2BF^2 = 3AC^2 + 6BI^2,$$

$$4AC^2 + 2CD^2 = 3AB^2 + 6CG^2, \text{ also nach Addition}$$

$$AB^2 + BC^2 + AC^2 + 2AE^2 + 2BF^2 + 2CD^2 = 6AH^2 + 6BI^2 + 6CG^2.$$

Nun ist nach 218.

$$4AH^2 + 4BI^2 + 4CG^2 = 3.AB^2 + 3.AC^2 + 3.BC^2,$$

folglich ist

$$AB^2 + BC^2 + AC^2 + 2AE^2 + 2BF^2 + 2CD^2 =$$

$$3AB^2 + 3AC^2 + 3BC^2 + 2AH^2 + 2BI^2 + 2CG^2 \text{ oder}$$

$$(AE^2 + BF^2 + CD^2) - (AH^2 + BI^2 + CG^2) = AB^2 + AC^2 + BC^2,$$

w. z. b. w.

229. Verbindet man die Halbierungspunkte zweier Paare zugeordneter Seiten eines Vierecks unter einander, so ist das so entstandene Parallelogramm halb

so gross als der Unterschied der beiden Dreiecke, welche eben diese beiden Seitenpaare mit einander bilden; es ist also (Fig. 100.) $EFGH = \frac{1}{2} (\angle ABN - \angle CDN)$, $EKGI = \frac{1}{2} (\angle AMB - \angle CMD)$, $FKHI = \frac{1}{2} (\angle BMC - \angle AMD)$.

Beweis. a) Nach 12. ist

$$\angle AEH = \angle EHI,$$

$$\angle EBF = \angle EKF,$$

$$\angle FGC = \angle FIG,$$

$$\angle HDG = \angle HKG$$

$$\parallel \text{gr } EFGH = \frac{1}{2} ABCD = \frac{1}{2} (\angle ABN - \angle CDN).$$

b) Es soll ferner

$$EKGI = \frac{1}{2} (\angle AMB - \angle CMD) \text{ sein.}$$

$$\begin{aligned} \text{Es ist } \frac{1}{2} (\angle AMB - \angle CMD) &= \frac{1}{2} (\angle ABD - \angle ADG) \\ &= \frac{1}{2} (4\angle EKI - 4\angle HKG) \\ &= 2(\angle EKI - \angle HKG) \\ &= \parallel \text{gr } EKGI \text{ (221).} \end{aligned}$$

c) Dass $FKHI = \frac{1}{2} (\angle BMC - \angle AMD)$ wird ähnlich bewiesen.

230. Schneidet man von einem der Endpunkte (A) der Diagonale (AC, Fig. 101.) eines Vierecks ein Stück (AF) ab, welches gleich ist dem Segment (CE) dieser Diagonale, welches zwischen der andern Diagonale und der Gegenecke liegt, verfährt dann eben so mit der zweiten Diagonale und verbindet diese Punkte (F, G), so ist die Quadratsumme dieser Verbindenden und der beiden Diagonalen gleich der Quadratsumme der vier Seiten.

Man verbinde die Mittelpunkte der Diagonalen durch HI, dann ist (215.)

$$\begin{aligned} AB^2 + BC^2 + CD^2 + DA^2 &= AC^2 + BD^2 + 4IH^2 \\ &= AC^2 + BD^2 + FG^2 \text{ (31. Zus.) w. z. b. w.} \end{aligned}$$

231. Wenn man in einem Vierecke ein Paar Gegenseiten (AD, BC, Fig. 102.) bis zu ihrem Durchschnittspunkte (E) und darauf auch über die entgegengesetzten Endpunkte (A, B) hinaus verlängert, die letz-

teren Verlängerungen den ersteren einzeln gleich macht ($AG = DE$, $BF = CE$) und die so erhaltenen beiden Punkte verbindet, so ist das Quadrat dieser Verbindenden sammt den Quadraten der Seiten, die man verlängert hat, gleich der Quadratsumme der beiden anderen Seiten und der Diagonalen des Vierecks.

Beweis. Nach 215. ist, wenn I und H die Halbierungspunkte von AD und FC sind,

$$AB^2 + DC^2 + AC^2 + BD^2 = AD^2 + BC^2 + 4IH^2.$$

Nun ist offenbar

$$GF = 2IH, \text{ also}$$

$$GF^2 = 4IH^2, \text{ folglich}$$

$$AD^2 + BC^2 + GF^2 = AB^2 + DC^2 + AC^2 + BD^2, \text{ w. z. b. w.}$$

232. Verlängert man die Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks über jeden ihrer Endpunkte hinaus um ihre eigene Länge, verbindet die so erhaltenen Punkte mit der Spitze des rechten Winkels und fällt in dem dadurch entstandenen stumpfwinkligen Dreieck aus einem der spitzen Winkel eine Senkrechte auf die verlängerte Gegenseite, so ist das Rechteck aus dieser Seite und ihrer Verlängerung doppelt so gross als das Quadrat der Hypotenuse. (Fig. 103.)

Beweis. Es seien a und b die Katheten, c die Hypotenuse des rechtwinkligen Dreiecks, so ist

$$x^2 = d^2 - f^2 = (3c)^2 - (f + e)^2$$

$$= 9c^2 - f^2 - e^2 - 2ef$$

$$\text{oder } d^2 = 9c^2 - e^2 - 2ef$$

$$\text{oder } d^2 + e^2 = 9c^2 - 2ef \dots (1.)$$

Nun ist aber

$$(1) \quad d^2 = a^2 + c^2 - 2cy$$

$$e^2 = b^2 + c^2 - 2cz$$

$$d^2 + e^2 = 5c^2 \dots (2.)$$

Aus (1) und (2) folgt

$$9c^2 - 2ef = 5c^2$$

$$2c^2 = ef, \text{ w. z. b. w.}$$

233. Wenn man in einem Dreiecke von jedem Endpunkte jeder Seite aus sowohl auf ihr selbst als auf ihrer Verlängerung den n ten Theil ihrer eigenen Länge abschneidet, alle diese Punkte mit den Gegenecken verbindet, so ist der Ueberschuss der Quadratsumme aller äusseren Verbindungslinien über die Quadratsumme aller inneren doppelt so gross als die Summe der Quadrate der Dreiecksseiten. (Es soll also Figur 104. $(Aa'^2 + A\alpha'^2 + Bb'^2 + B\beta'^2 + Cc'^2 + C\gamma'^2) - (Aa^2 + A\alpha^2 + Bb^2 + B\beta^2 + Cc^2 + C\gamma^2) = 2(AB^2 + AC^2 + BC^2)$ sein.)

Bemerkung. Der vorstehende Satz hat keine allgemeine Gültigkeit, sondern ist nur für $n=2$ richtig, was aus folgender Betrachtung hervorgeht. Denken wir uns die Winkelspitzen des Urdreiecks ABC mit den Halbierungspunkten der Gegenseiten verbunden und bezeichnen wir die Linien bezüglich durch $AA' + BB' + CC'$, so ist, weil A' gleichzeitig Mitte von $a\alpha$ und $a'\alpha'$ sein muss und

$$a\alpha = \frac{n-2}{n} BC, \quad a'\alpha' = \left(\frac{n+2}{n}\right) BC \text{ ist, nach 215}^a.$$

$$AA'^2 = \frac{1}{2}(Aa'^2 + A\alpha'^2) - \left(\frac{n+2}{2n} \cdot BC\right)^2$$

$$AA'^2 = \frac{1}{2}(Aa^2 + A\alpha^2) - \left(\frac{n-2}{2n} \cdot BC\right)^2, \text{ also}$$

$$\left(\frac{n+2}{2n}\right)^2 BC^2 + AA'^2 = \frac{1}{2}(Aa'^2 + A\alpha'^2)$$

$$\left(\frac{n-2}{2n}\right)^2 BC^2 + AA'^2 = \frac{1}{2}(Aa^2 + A\alpha^2) \quad \left. \vphantom{\left(\frac{n-2}{2n}\right)^2 BC^2 + AA'^2 = \frac{1}{2}(Aa^2 + A\alpha^2)} \right\} \text{ nach Subtraction}$$

$$\frac{2}{n} \cdot BC^2 = \frac{1}{2}(Aa'^2 + A\alpha'^2 - Aa^2 - A\alpha^2)$$

$$\text{oder } \frac{4}{n} BC^2 = Aa'^2 + A\alpha'^2 - Aa^2 - A\alpha^2 \dots (1.)$$

Für die übrigen Seiten bekommen wir offenbar ganz analog:

$$\frac{4}{n} \cdot AC^2 = Bb'^2 + B\beta'^2 - Bb^2 - B\beta^2 \dots (2.)$$

$$\frac{4}{n} \cdot AB^2 = Cc'^2 + C\gamma'^2 - Cc^2 - C\gamma^2 \dots (3.)$$

Addiren wir (1), (2) und (3), so erhalten wir

$$\begin{aligned} & \frac{4}{n}(AB^2 + AC^2 + BC^2) \\ &= Aa'^2 + A\alpha'^2 + Bb'^2 + B\beta'^2 + Cc'^2 + C\gamma'^2 - Aa^2 \\ & \quad - A\alpha^2 - Bb^2 - B\beta^2 - Cc^2 - C\gamma^2 \dots (4.) \end{aligned}$$

welche Formel nur für $n=2$ in die oben angegebene übergeht.

Zusätze. 1) Wenn man in einem Dreiecke von jedem Endpunkte jeder Seite aus sowohl auf ihr selbst als auf ihrer Verlängerung den vierten Theil ihrer eigenen Länge abschneidet, alle diese Punkte mit den Gegenecken verbindet, so ist der Ueberschuss der Quadratsumme aller äusseren Verbindungslinien über die Quadratsumme aller inneren gerade so gross, als die Summe der Quadrate der Dreiecksseiten.

Beweis. Ergiebt sich unmittelbar aus Formel (4).

2) Wenn man den n ten Theil in der vorher angegebenen Weise abträgt, so ist die Differenz der Quadrate zweier von einer Winkelspitze ausgehenden äusseren Verbindungslinien, die Differenz der Quadrate der von derselben Spitze auslaufenden inneren Verbindungslinien und die Differenz der Quadrate der von genannter Spitze auslaufenden Dreiecksseiten von gleicher Grösse.

Beweis. Nach 200^b. ist

$$Aa'^2 + nA\alpha'^2 = \frac{BC^2}{n} + n \cdot BC^2 + (n-1)AB^2$$

$$A\alpha'^2 + nAa'^2 = \frac{BC^2}{n} + n \cdot BC^2 + (n-1)AC^2, \text{ folglich}$$

$$(n-1) \cdot A\alpha'^2 - (n-1) \cdot Aa'^2 = (n-1)AB^2 - (n-1)AC^2, \text{ oder}$$

$$A\alpha'^2 - Aa'^2 = AB^2 - AC^2, \text{ w. z. b. w.}$$

234. Nimmt man ausserhalb eines gleichseitigen Dreiecks einen beliebigen Punkt, so ist die Summe der Quadrate der Linien, die ihn mit den Ecken des Dreiecks verbinden, dreimal so gross als die Quadratsumme der beiden Linien, welche den Höhendurchschnitt des Dreiecks mit einer seiner Ecken und

mit eben jenem Paare ausserhalb verbinden. (Fig. 105.)
 $a^2 + b^2 + c^2 = 3(d^2 + e^2).$

Beweis. Nach 215^a. ist, da $\frac{3}{4}BC^2 = \frac{3}{4}d^2, \frac{BC^2}{2} = \frac{3}{2}d^2.$

$$2x^2 = b^2 + c^2 - \frac{3}{2}d^2 \dots (1.)$$

nach 215^a. $2x^2 + a^2 = \frac{d^2}{2} + d^2 + 3e^2 \dots (2.)$

(1) in (2) eingesetzt giebt:

$$b^2 + c^2 - \frac{3}{2}d^2 + a^2 = \frac{3}{2}d^2 + 3e^2$$

$$a^2 + b^2 + c^2 = 3(d^2 + e^2), \text{ w. z. b. w.}$$

Zusatz. Der Satz bleibt auch noch richtig, wenn der Punkt innerhalb oder auf dem Umfange des Dreiecks angenommen wird.

235. Nimmt man in der Ebene eines Quadrats einen beliebigen Punkt, so ist die Summe der Quadrate der Linien, welche ihn mit den Ecken der Figur verbinden, viermal so gross als die Quadratsumme der beiden Linien, welche den Durchschnittspunkt der beiden Diagonalen mit einer der Ecken und mit eben jenem Punkte verbinden. ($a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 4(e^2 + f^2)$ Fig. 106.)

Beweis. Nach 215^a. ist

$$2e^2 = a^2 + c^2 - 2d^2$$

$$2e^2 = b^2 + d^2 - 2d^2$$

$$4(e^2 + f^2) = a^2 + b^2 + c^2 + d^2, \text{ w. z. b. w.}$$

Zusatz. Für die übrigen Parallelogramme findet ein ähnlicher Satz statt, von welchen dieser ein besonderer Fall ist. Bezeichnen nämlich f und g die Hälften der Diagonalen und haben a, b, c, d, e die vorige Bedeutung, so ist

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 4e^2 + 2f^2 + 2g^2;$$

welcher für $f = g$ in den vorigen übergeht; so dass also auch fürs Rechteck der vorige Satz noch gilt.

2) Auch fürs allgemeine Viereck hat man einen entsprechenden Satz. Werden die Winkelspitzen desselben mit einem beliebigen Punkte in dessen Ebene verbunden, letzterer ausserdem noch mit den Mittelpunkten der Diagonalen, so ist, wenn $a, b, c,$

d die vier ersteren, e, f die beiden letzteren Verbindungslinien, und g und h die halben Diagonalen bezeichnen:

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 2(e^2 + f^2 + g^2 + h^2).$$

236. Nimmt man in der Ebene eines beliebigen regelmässigen Vierecks von gerader Eckenzahl einen beliebigen Punkt, so ist die Quadratsumme aller der Linien, die diesen Punkt mit sämtlichen Ecken verbinden, so vielmal so gross als die Summe der Quadrate der beiden Linien, welche den Durchschnittspunkt der Diagonalen zwischen je zwei Gegenecken mit einer der Ecken und mit eben jenem angenommenen Punkte verbinden, so viel die Eckenzahl der Figur Einheiten hat

Beweis. Ganz analog dem zum vorigen Satze.

237. Zieht man aus den Spitzen eines Dreiecks nach den Halbierungspunkten der Gegenseiten gerade Linien und verbindet sowohl den gemeinschaftlichen Durchschnittspunkt als auch die Spitzen des Dreiecks mit einem beliebigen Punkte in dessen Ebene, so ist die Summe der Quadrate der drei letzteren Linien gleich dem dreifachen Quadrate der Linie, welche den Durchschnittspunkt der genannten Transversalen mit dem angenommenen Punkte verbindet, vermehrt um die Quadrate der Linien, die von eben diesem Durchschnittspunkte nach den Spitzen des Dreiecks auslaufen. (Fig. 107. $a^2 + b^2 + c^2 = 3d^2 + e^2 + f^2 + g^2$.)

Beweis. Nach 200^b. ist

$$2x^2 + a^2 = \frac{3}{2}e^2 + 3d^2 \dots (1)$$

$$\text{nach } 215^a. \quad 2x^2 = b^2 + c^2 - \frac{BC^2}{2} \dots (2)$$

Setzen wir (2) in (1), so erhalten wir

$$a^2 + b^2 + c^2 = \frac{3}{2}e^2 + 3d^2 + \frac{BC^2}{2} \dots (3.)$$

Auf analoge Weise erhalten wir;

$$a^2 + b^2 + c^2 = \frac{3}{2}f^2 + 3d^2 + \frac{AC^2}{2} \dots (4.)$$

$$a^2 + b^2 + c^2 = \frac{3}{2}g^2 + 3d^2 + \frac{AB^2}{2} \dots (5.)$$

Addiren wir (3), (4) und (5) und wenden 218. an, so erhalten wir:

$$a^2 + b^2 + c^2 = e^2 + f^2 + g^2 + 3d^2, \text{ w. z. b. w.}$$

238. Nimmt man in der Ebene eines Dreiecks zwei Punkte beliebig, jedoch so, dass sie gleiche Entfernung von dem Punkte haben, in welchem sich die Linien schneiden, welche die Halbierungspunkte der Seiten mit den Gegenecken verbinden, und verbindet sowohl den einen als den andern mit den Ecken, so ist die Quadratsumme der einen Linienternion gleich der Quadratsumme der andern.

Beweis. Folgt nach zweimaliger Anwendung von 237.

239. Die Summe der Quadrate der Linien, welche einen beliebigen Punkt in der Ebene eines Vierecks mit dessen Ecken verbinden, ist gleich der Quadratsumme der Geraden, welche man von dem Punkte, in dem sich die drei Geraden schneiden, welche die Halbierungspunkte je zweier zugeordneter Seiten verbinden, nach den Ecken zieht, vermehrt um das vierfache Quadrat der Linie, welche eben diese Durchschnittspunkte mit dem angenommenen Punkte verbindet. ($a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \delta^2 + 4e^2$ Fig. 108.)

$$\left. \begin{aligned} x^2 &= \frac{1}{2}(a^2 + b^2) - u^2 \\ y^2 &= \frac{1}{2}(c^2 + d^2) - v^2 \end{aligned} \right\} 215^a.$$

$$x^2 + y^2 = \frac{1}{2}(a^2 + b^2 + c^2 + d^2) - u^2 - v^2 \dots (1.)$$

$$e^2 = \frac{1}{2}(x^2 + y^2) - z^2 \dots (2.)$$

$$x^2 + y^2 = 2e^2 + 2z^2 \dots (3.)$$

Aus (3) und (1) folgt

$$4e^2 + 4z^2 = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 - 2u^2 - 2v^2 \dots (4.)$$

$$z^2 = \frac{1}{2}(\alpha^2 + \beta^2) - u^2$$

$$z^2 = \frac{1}{2}(\gamma^2 + \delta^2) - v^2$$

$$4z^2 = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \delta^2 - 2u^2 - 2v^2 \dots (5.)$$

(5) in (4) eingesetzt giebt:

$$4e^2 + \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \delta^2 = a^2 + b^2 + c^2 + d^2, \text{ w. z. b. w.}$$

240. Haben zwei oder mehrere Punkte in der Ebene eines Vierecks gleiche Entfernung von dem gemeinschaftlichen Durchschnittspunkte der die Halbierungspunkte je zweier Gegenseiten Verbindenden, und man zieht von jedem derselben nach allen vier Ecken gerade Linien, so ist die Summe der Quadrate der einen Linienquaternion so gross als die Summe der Quadrate jeder der übrigen Quaternionen.

Beweis. Unmittelbare Folge aus vorigem Satze.

241. Die Summe der Quadrate der drei Linien, welche man von dem gemeinschaftlichen Durchschnittspunkte der die Seiten halbirenden Scheitellinien eines Dreiecks nach dessen Ecken zieht, ist kleiner als die Quadratsumme der Geraden, welche irgend einen andern Punkt in der Ebene des Dreiecks mit dessen Ecken verbinden, d. h. für jenen Durchschnittspunkt ist die Summe der Quadrate seiner Verbindungslinien mit den Ecken ein *Minimum*.

Beweis. Ergiebt sich leicht durch Anwendung von 237.

242. In jedem Vierecke ist der gemeinschaftliche Durchschnittspunkt der die Halbierungspunkte je zweier verbindenden Geraden derjenige, für welchen die Summe der Quadrate seiner Verbindungslinien mit den Ecken ein *Minimum* ist.

Beweis. Ergiebt sich mit Leichtigkeit durch Anwendung von 239.

243. Wenn man aus der Spitze eines gleichschenkligen Dreiecks nach dessen Grundlinie oder de-

ren Verlängerung eine Gerade zieht, dass sie mit ihr einen Winkel von $\frac{2}{3}R$ oder $\frac{4}{3}R$ bildet, so stehen diese Transversale und die durch sie gebildeten zwei Segmente der Grundlinie stets in einer solchen Beziehung zu einander, dass die grösste dieser drei Linien so gross ist, als die beiden anderen zusammengenommen.

Beweis. I) Nach 200.^a ist (Fig. 109.)

$$x^2 = b^2 + c^2 - by$$

$$x^2 = b^2 + c^2 - b\left(\frac{b-a}{2}\right)$$

$$\text{oder } x^2 = c^2 + ab.$$

Nun ist nach 183.

$$x^2 = b^2 + c^2 - bc,$$

$$\text{folglich } ab + c^2 = b^2 + c^2 - bc$$

$$ab = b^2 - bc$$

$$a = b - c$$

$$a + c = b, \text{ w. z. b. w.}$$

$$\text{II) Fig. 110. } x^2 = c^2 + a^2 - 2a\left(\frac{b-a}{2}\right)$$

$$x^2 = c^2 - ab$$

$$x^2 = c^2 + b^2 - bc$$

$$c^2 - ab = c^2 + b^2 - bc$$

$$-ab = b^2 - bc$$

$$-a = b - c$$

$$c = a + b, \text{ w. z. b. w.}$$

244. Schneidet man auf jeder Seite eines beliebigen Vielecks von jedem ihrer Endpunkte aus den n ten Theil ihrer eigenen Länge ab und verbindet alle diese Durchschnittspunkte mit einem beliebigen Punkte in der Ebene des Vielecks, so ist die Summe der Quadrate der ersten, dritten, fünften etc. dieser Verbindenden, gleich der Quadratsumme der zweiten, vierten, sechsten etc.

Beweis. Bezeichnen wir die n ten Theile der Vielecksseiten (Fig. 111.) durch s, t, u, v ; die ganzen Seiten also durch ns, nt etc. so haben wir (200.^b):

$$n\alpha^2 + x^2 = ns^2 + n^2s^2 + (n+1)w^2$$

$$nb^2 + w^2 = ns^2 + n^2s^2 + (n+1)x^2$$

$$n(\alpha^2 - b^2) - w^2 - x^2 = (n+1)(w^2 - x^2) \text{ oder}$$

$$n(\alpha^2 - b^2) = (n+2)(w^2 - x^2) \text{ und analog}$$

$$n(\beta^2 - c^2) = (n+2)(x^2 - y^2)$$

$$n(\gamma^2 - d^2) = (n+2)(y^2 - z^2)$$

$$n(\delta^2 - a^2) = (n+2)(z^2 - w^2), \text{ addiren wir:}$$

$$n(\alpha^2 - b^2) + n(\beta^2 - c^2) + n(\gamma^2 - d^2) + n(\delta^2 - a^2) = 0$$

$$\text{oder } \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \delta^2 = a^2 + b^2 + c^2 + d^2, \text{ w. z. b. w.}$$

(Für jedes andere Vieleck wird der Satz ganz auf dieselbe Weise bewiesen.)

215. Nimmt man innerhalb eines Vielecks zwei beliebige Punkte und verbindet jeden sowohl mit allen Ecken als auch mit den Halbirungspunkten aller Seiten, so ist die Summe der Quadrate der Geraden, die man von dem einen Punkte nach den Ecken und von dem andern nach den Halbirungspunkten der Seiten gezogen hat, so gross als die Quadratsumme aller übrigen Verbindenden.

Beweis. Nennen wir die halben Vielecksseiten (Fig. 112.) bezüglich w, x, y, z, so ist (215^a.)

$$\alpha^2 = \frac{1}{2}(a^2 + b^2) - x^2$$

$$\alpha'^2 = \frac{1}{2}(a'^2 + b'^2) - x^2$$

$$\alpha^2 - \alpha'^2 = \frac{1}{2}(a^2 + b^2 - a'^2 - b'^2) \text{ und analog}$$

$$\beta^2 - \beta'^2 = \frac{1}{2}(b^2 + c^2 - b'^2 - c'^2)$$

$$\gamma^2 - \gamma'^2 = \frac{1}{2}(c^2 + d^2 - c'^2 - d'^2)$$

$$\delta^2 - \delta'^2 = \frac{1}{2}(d^2 + a^2 - d'^2 - a'^2) \text{ nach Addition:}$$

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \delta^2 - \alpha'^2 - \beta'^2 - \gamma'^2 - \delta'^2 =$$

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 - a'^2 - b'^2 - c'^2 - d'^2 \text{ oder}$$

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \delta^2 + a'^2 + b'^2 + c'^2 + d'^2 =$$

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + \alpha'^2 + \beta'^2 + \gamma'^2 + \delta'^2, \text{ w. z. b. w.}$$

(Für jedes andere Vieleck ist der Beweis ganz derselbe.)

Anmerkung. Der Satz bleibt auch noch richtig, wenn die beiden Punkte irgend eine andere Lage in der Ebene des Vielecks haben.

246. Verlängert man in einem Paralleltrapez (ABCD, Fig. 113.) die beiden nicht parallelen Seiten bis zum gegenseitigen Durchschnittspunkte (E) und verbindet denselben mit dem Durchschnittspunkte der Diagonalen (F), so halbirt diese Verbindende stets die beiden parallelen Seiten.

Beweis. Man ziehe $FK \parallel AD$, $FI \parallel BC$, dann ist

$$\angle BCD = \angle ACD$$

$$\angle CFD = \angle CFI$$

$$\angle BFC = \angle AFD,$$

folglich auch $\angle BIC = \angle AKD$,

folglich $CI = KD$ und deshalb

$$\angle CEI = \angle DEK, \text{ also auch}$$

$$\angle CEF = \angle DEF$$

$$\angle CFB = \angle DFA \text{ subtrahirt}$$

$$\angle EBF = \angle EAF,$$

folglich sind die auf EF von B und A gefällten Höhen gleich, folglich auch

$$\angle BGF = \angle AGF, \text{ folglich}$$

I) $BG = AG$, w. z. b. w.

Da $\angle CEF = \angle DEF$, so sind die von C und D auf AH gefällten Lothe gleich, folglich auch

$$\angle CFH = \angle DFG, \text{ und deshalb}$$

II) $CH = HD$, w. z. b. w.

Zusatz. Die durch den Durchschnittspunkt der Diagonalen eines Paralleltrapezes mit den parallelen Seiten gezogene Parallele wird in diesem Punkte halbirt.

247. Zieht man von einem beliebigen Punkte (B) auf einem der Schenkel (MA) eines beliebigen Winkels (MAN, Fig. 114.) nach dem andern Schenkel ein Paar beliebiger Geraden (BD, BE) und mit ihnen zwei Parallelen (CF, CG) von einem beliebigen Punkte (C) des zweiten Schenkels nach dem ersten, so sind die beiden Geraden (FD, GE), welche die Endpunkte von

je zwei solchen dieser vier Linien, die nicht parallel sind, verbinden, stets einander parallel.

Beweis.

$$AD : AC = AB : AG$$

$$AC : AE = AF : AB$$

$$AD : AE = AF : AG, \text{ folglich}$$

$$DF \parallel EG, \text{ w. z. b. w.}$$

248. Laufen von einem Punkte (A, Fig. 115) drei beliebige Gerade (AB, AC, AD) aus, und man zieht von zwei beliebigen Punkten der einen (AB) ein Paar beliebiger Parallelen (BG, EF) nach einer der beiden andern (AC) und von den so erhaltenen Durchschnittspunkten (F, G) ein Paar beliebiger Parallelen (FI, GH) nach der dritten (AD) und verbindet nun diese beiden letzten Durchschnittspunkte (I, H) mit den auf der ersteren Linie angenommenen Punkten (E, B), so sind auch diese beiden Geraden stets parallel.

Beweis. $AF : AG = AB : AE = AH : AI,$

folglich $EI \parallel DH, \text{ w. z. b. w.}$

249. Erklärung. Der nöthigen Kürze halber soll in den unmittelbar folgenden Sätzen Seite eines Vielecks jede Linie heissen, die irgend zwei seiner Ecken verbindet, dagegen die gewöhnlich sogenannten Seiten mit dem besondern Namen Umfangsseiten belegt werden.

250. Verbindet man in einem Fünfeck jede Ecke mit den Halbirungspunkten der drei nicht anliegenden Umfangsseiten, so ist die Summe der Quadrate von allen ersten und dritten dieser Halbirenden um $\frac{3}{4}$ der Quadratsumme der Umfangsseiten grösser, als die Summe der Quadrate der übrigen Halbirenden.

Beweis. Bezeichnen wir (Fig. 115^b.) die Seiten des Fünfecks ABCDE bezüglich durch $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon$, die von den Ecken auslaufenden Halbirenden in der Richtung des beigezeichneten Pfeils



durch $a_1 b_1 c_1$; $a_2 b_2 c_2$; u. s. f., so soll, wenn $\Sigma a^2, \Sigma b^2, \Sigma c^2$ die Summen der Quadrate sämmtlicher a 's, b 's, c 's bezüglich bezeichnen

$$\Sigma a^2 + \Sigma c^2 - \Sigma b^2 = \frac{3}{4}(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \delta^2 + \varepsilon^2)$$

sein. Nach 215^a. ist

$$c_1^2 = \frac{1}{2}(\alpha^2 + AC^2) - \frac{\beta^2}{4} \dots (1.)$$

$$b_1^2 = \frac{1}{2}(AC^2 + AD^2) - \frac{\gamma^2}{4} \dots (2.)$$

$$a_1^2 = \frac{1}{2}(AD^2 + \varepsilon^2) - \frac{\delta^2}{4} \dots (3.)$$

Subtrahiren wir (2) von der Summe (1) und (3), so erhalten wir:

$$a_1^2 + c_1^2 - b_1^2 = \frac{1}{2}(\alpha^2 + \varepsilon^2) + \frac{\gamma^2}{4} - \frac{\beta^2}{4} - \frac{\delta^2}{4}$$

und so analog

$$a_2^2 + c_2^2 - b_2^2 = \frac{1}{2}(\beta^2 + \alpha^2) + \frac{\delta^2}{4} - \frac{\gamma^2}{4} - \frac{\varepsilon^2}{4}$$

$$a_3^2 + c_3^2 - b_3^2 = \frac{1}{2}(\gamma^2 + \beta^2) + \frac{\varepsilon^2}{4} - \frac{\delta^2}{4} - \frac{\alpha^2}{4}$$

$$a_4^2 + c_4^2 - b_4^2 = \frac{1}{2}(\delta^2 + \gamma^2) + \frac{\alpha^2}{4} - \frac{\varepsilon^2}{4} - \frac{\beta^2}{4}$$

$$a_5^2 + c_5^2 - b_5^2 = \frac{1}{2}(\varepsilon^2 + \delta^2) + \frac{\beta^2}{4} - \frac{\alpha^2}{4} - \frac{\gamma^2}{4}$$

Addiren wir diese 5 Gleichungen zusammen, so erhalten wir $\Sigma a^2 + \Sigma c^2 - \Sigma b^2 = \frac{3}{4}(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \delta^2 + \varepsilon^2)$, w. z. b. w.

Anmerkung. Dieser Satz ist offenbar eine Erweiterung des Satzes unter 218. Es fallen nämlich dort a_1 ; b_1 ; c_1 ; u. s. f. zusammen. Bezeichnen wir also die einfachen Halbirenden durch a , so geht der vorige Satz über in

$$\begin{aligned} \Sigma a^2 + \Sigma a^2 - \Sigma a^2 &= \Sigma a^2 \\ &= \frac{3}{4}(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2), \end{aligned}$$

wenn α, β, γ die Dreiecksseiten bezeichnen.

Zusätz c. a) Aus den obigen Gleichungen ergibt sich ohne Weiteres noch der Satz: Der Ueberschuss der Quadratsumme der beiden äusseren von einer Winkelspitze auslaufenden Halbirenden über das Quadrat der mittleren ist jederzeit gleich der halben Quadratsumme der einschliessenden Umfangsseiten, vermindert um den vierten Theil des Ueberschusses der Quadratsumme der an die vorgenannten Seiten anstossenden Umfangsseiten über das Quadrat der noch übrigen Umfangsseiten.

b) Ist das Fünfeck ein reguläres, so ist der Ueberschuss der Quadratsumme der beiden von einer Winkelspitze auslaufenden äus-

seren Halbirenden über das Quadrat der dritten Dreiviertel vom Quadrat der Umfangsseite.

c) Es ergibt sich für jedes beliebige Fünfeck auch noch durch Anwendung desselben Satzes (215^a.) mit Rücksicht auf die frühere Bezeichnung die bemerkenswerthe Gleichung

$$\Sigma a^2 = \Sigma c^2$$

251. Verbindet man in einem Siebeneck jede Ecke mit den Halbirungspunkten der nicht anliegenden fünf Umfangsseiten, so ist die Summe der Quadrate aller ersten, dritten und fünften Halbirenden um $\frac{3}{4}$ von der Quadratsumme der Umfangsseiten grösser als die Summe der Quadrate der übrigen Halbirenden, d. h. aller zweiten und vierten.

252. Allgemein wenn man in einem Vieleck von ungerader Eckenanzahl jede Ecke mit den Halbirungspunkten aller nicht anliegenden Umfangsseiten verbindet, so ist die Summe der Quadrate aller derjenigen unter diesen Halbirenden, deren Stellenzeiger ungerade sind, um $\frac{3}{4}$ von der Quadratsumme aller Umfangsseiten grösser als die Summe der Quadrate aller übrigen Halbirenden, d. h. aller zweiten und vierten.

Die Beweise dieses und des vorigen Satzes unterscheiden sich im Wesentlichen nicht von dem zu 250.

253. Verbindet man in einem Viereck jede Ecke mit den Halbirungspunkten der beiden nicht anliegenden Umfangsseiten, so ist die Summe der Quadrate aller ersten Halbirenden gleich der Summe der Quadrate aller zweiten. (Fig. 116.)

Beweis. Nach 215^a. ist

$$a_1^2 = \frac{1}{2}(\delta^2 + d_1^2) - \frac{\gamma^2}{4}$$

$$a_2^2 = \frac{1}{2}(\alpha^2 + d_2^2) - \frac{\delta^2}{4}$$

$$a_3^2 = \frac{1}{2}(\beta^2 + d_1^2) - \frac{\alpha^2}{4}$$

$$a_4^2 = \frac{1}{2}(\gamma^2 + d_2^2) - \frac{\beta^2}{4}$$

$$a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2 = \frac{1}{4}(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \delta^2) + d_1^2 + d_2^2 \dots (1.)$$

Ferner ist

$$b_1^2 = \frac{1}{2}(\alpha^2 + d_1^2) - \frac{\beta^2}{4}$$

$$b_2^2 = \frac{1}{2}(\beta^2 + d_2^2) - \frac{\gamma^2}{4}$$

$$b_3^2 = \frac{1}{2}(\gamma^2 + d_1^2) - \frac{\delta^2}{4}$$

$$b_4^2 = \frac{1}{2}(\delta^2 + d_2^2) - \frac{\alpha^2}{4}$$

$$b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 + b_4^2 = \frac{1}{4}(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \delta^2) + d_1^2 + d_2^2 \dots (2.)$$

Aus der Vergleichung von (1) und (2) ergibt sich:

$$a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2 = b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 + b_4^2, \text{ w. z. b. w.}$$

254. Wenn man in einem Sechsecke jede Ecke mit den Halbirungspunkten der vier nicht anliegenden Umfangsseiten verbindet, so ist die Summe der Quadrate aller ersten und dritten Halbirenden gleich der Summe der Quadrate aller zweiten und vierten.

255. Allgemein, wenn man in einem Vielecke von gerader Eckenanzahl jede Ecke mit den Halbirungspunkten aller nicht anliegenden Umfangsseiten verbindet, so ist die Summe der Quadrate aller derjenigen Halbirenden, deren Stellenzeiger ungerade sind, gleich der Summe der Quadrate derer, die gerade Stellenzeiger haben.

Beweis. Der Beweis dieses und des vorigen Satzes stimmen im Wesentlichen überein mit dem Beweise zu 253.

256. Verbindet man jede Ecke eines Vierecks mit den Halbirungspunkten aller nicht anliegenden Seiten (249.), so ist die Summe der Quadrate aller dieser Linien anderthalb mal so gross als die Quadratsumme aller Seiten. (Fig. 117.)

Beweis. Nach 215^a. ist, wenn die a's und b's dieselbe Bedeutung wie 253. haben und die d's die nach den Diagonalen gezogenen Linien sind,

$$b_1^2 = \frac{1}{2}(\alpha^2 + \varepsilon^2) - \frac{\beta^2}{4}$$

$$b_2^2 = \frac{1}{2}(\beta^2 + \zeta^2) - \frac{\gamma^2}{4}$$

$$b_3^2 = \frac{1}{2}(\gamma^2 + \varepsilon^2) - \frac{\delta^2}{4}$$

$$b_4^2 = \frac{1}{2}(\delta^2 + \zeta^2) - \frac{\alpha^2}{4}$$

$$\Sigma b^2 = \frac{1}{4}(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \delta^2) + \varepsilon^2 + \zeta^2.$$

Da nun (153.)

$$\Sigma a^2 = \Sigma b^2,$$

so ist $\Sigma a^2 + \Sigma b^2 = \frac{1}{2}(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \delta^2) + 2\varepsilon^2 + 2\zeta^2 \dots (1.)$

Ferner ist:

$$d_1^2 = \frac{1}{2}(\alpha^2 + \delta^2) - \frac{\zeta^2}{4}$$

$$d_2^2 = \frac{1}{2}(\beta^2 + \alpha^2) - \frac{\varepsilon^2}{4}$$

$$d_3^2 = \frac{1}{2}(\gamma^2 + \beta^2) - \frac{\zeta^2}{4}$$

$$d_4^2 = \frac{1}{2}(\delta^2 + \gamma^2) - \frac{\varepsilon^2}{4}$$

$$\Sigma d^2 = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \delta^2 - \frac{1}{2}(\varepsilon^2 + \zeta^2) \dots (2.)$$

Addiren wir (1) und (2), so erhalten wir:

$$\Sigma a^2 + \Sigma b^2 + \Sigma d^2 = \frac{3}{2}(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \delta^2 + \varepsilon^2 + \zeta^2), \text{ w. z. b. w.}$$

Anmerkung. Im Dreieck sind die d's, so wie δ , ε und ζ Null und die a's gleich den b's, folglich erhält man da

$$2\Sigma a^2 = \frac{3}{2}(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2) \text{ oder}$$

$$4\Sigma a^2 = 3(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2),$$

welches der Satz unter 218. ist.

257. Die Summe der Quadrate aller der Linien, welche man erhält, indem man jede Ecke eines Fünfecks mit den Halbirungspunkten aller nicht anliegenden Seiten verbindet, ist $\frac{9}{4}$ mal so gross als die Quadratsumme aller Seiten der Figur.

258. Verbindet man in einem Sechsecke jede Ecke mit den Halbirungspunkten aller nicht anliegenden Seiten, so ist die Summe der Quadrate aller die-

ser Verbindenden dreimal so gross als die Summe der Quadrate aller Seiten des Sechsecks.

259. Allgemein, wenn man in einem n eck jede Ecke mit den Halbierungspunkten aller nicht anliegenden Seiten verbindet, so ist die Quadratsumme aller dieser Verbindenden $(n-2)$ mal so gross als die Quadratsumme, welche $\frac{3}{4}$ von der Summe der Quadrate aller Seiten des Vierecks ist.

Beweis. Dieser und die beiden vorigen Sätze lassen sich ganz analog erweisen, wie 256.

260. Verbindet man in einem Vierecke die Halbierungspunkte von je zwei zugeordneten Seiten, so ist die Summe der Quadrate dieser Verbindenden viermal so gross als die Quadratsumme aller Seiten. (Fig. 118.)

Beweis. Bezeichnen wir durch a, b, c, d die Seiten des Vielecks und gleichzeitig die Punkte, an denen sie stehen, so ist (215^a.)

$$\begin{aligned}\alpha^2 &= \frac{1}{2}(AC^2 + BC^2) - \frac{a^2}{4} \quad \text{oder} \\ 2\alpha^2 &= \frac{1}{2}(AC^2 + BC^2) - \frac{a^2}{2} \\ AC^2 &= \frac{1}{2}(d^2 + f^2) - \frac{c^2}{4} \\ BC^2 &= \frac{1}{2}(b^2 + e^2) - \frac{c^2}{4}\end{aligned}$$

$$2\alpha^2 = \frac{1}{2}(b^2 + d^2 + e^2 + f^2) - \frac{a^2}{2} - \frac{c^2}{2} \dots (1.)$$

$$\begin{aligned}2\beta^2 &= Bd^2 + cd^2 - \frac{b^2}{2} \\ Bd^2 &= \frac{1}{2}(a^2 + e^2) - \frac{d^2}{4} \\ cd^2 &= \frac{1}{2}(c^2 + f^2) - \frac{d^2}{4}\end{aligned}$$

$$2\beta^2 = \frac{1}{2}(a^2 + c^2 + e^2 + f^2) - \frac{b^2}{2} - \frac{d^2}{2} \dots (2.)$$

$$\begin{aligned}2\gamma^2 &= Bf^2 + Df^2 - \frac{e^2}{2} \\ Bf^2 &= \frac{1}{2}(a^2 + b^2) - \frac{f^2}{4} \\ Df^2 &= \frac{1}{2}(c^2 + d^2) - \frac{f^2}{4}\end{aligned}$$

$$2\gamma^2 = \frac{1}{2}(a^2 + b^2 + c^2 + d^2) - \frac{e^2}{2} - \frac{f^2}{2} \dots (3.)$$

Addiren wir (1), (2) und (3) zusammen, so erhalten wir:

$$2(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2) = \frac{1}{2}(a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2 + f^2)$$

$$\text{oder } \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = \frac{1}{4}(a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2 + f^2),$$

w. z. b. w. (Kürzer durch ähnliche Betrachtungen wie im Beweise zu 264.)

261. Wenn man in einem Fünfeck den Halbirungspunkt jeder Seite mit den Halbirungspunkten aller derjenigen unter den übrigen Seiten verbindet, die mit der ersteren keinen gemeinschaftlichen Endpunkt haben, so ist die Summe der Quadrate aller dieser Verbindenden $\frac{3}{4}$ von der Quadratsumme aller Seiten.

262. Wenn man den Halbirungspunkt jeder Seite eines Sechsecks mit den Halbirungspunkten aller derjenigen unter den übrigen Seiten verbindet, die mit der ersteren keinen gemeinschaftlichen Endpunkt haben, so ist die Summe der Quadrate aller dieser Verbindenden anderthalb mal so gross als die Quadratsumme aller Seiten.

263. Allgemein ist die Summe der Quadrate der Linien, die man dadurch erhält, dass man den Halbirungspunkt einer jeden Seite eines n ecks mit den Halbirungspunkten aller derjenigen unter den übrigen Seiten verbindet, welche mit der erstern keinen gemeinschaftlichen Endpunkt haben, $\frac{(n-2)(n-3)}{2}$ mal so gross als der vierte Theil der Quadratsumme aller Seiten.

264. Verbindet man in einem Vierecke die Halbirungspunkte je zwei solcher Seiten, die einen gemeinschaftlichen Endpunkt haben, so ist die Summe der Quadrate dieser Linien halb so gross als die Quadratsumme aller Seiten und mithin doppelt so gross

als die Summe der Quadrate der Linien, welche die Halbirungspunkte je zweier Gegenseiten verbinden.

Beweis. Von den Verbindungslinien der Mittelpunkte zweier gegenüberliegenden Umfangsseiten ist jede gleich der Hälfte einer Diagonale, die Summe ihrer Quadrate also gleich der halben Summe der Quadrate der Diagonalen. Bei den übrigen findet ganz dasselbe in Bezug auf die Umfangsseiten statt. Die Richtigkeit der letzten Behauptung folgt aus 260.

265. Verbindet man in einem Fünfeck die Halbirungspunkte sowohl je zwei solcher Seiten, die einen gemeinschaftlichen Endpunkt haben, als auch von je zwei unter denjenigen, die keinen haben, so ist die Quadratsumme der erstern Verbindenden gleich der Quadratsumme der letztern.

Beweis. Von den Verbindenden der Halbirungspunkte zweier anstossenden Seiten sind stets drei solcher Linien gleich einer und derselben halben Seite, folglich die Summe der Quadrate solcher drei Linien gleich $\frac{3}{4}$ vom Quadrat einer Seite, und deshalb sämtliche Verbindungslinien dieser Art $\frac{3}{4}$ von der Quadratsumme sämtlicher Seiten. Die Quadratsumme der übrigen Verbindenden ist aber nach 261. eben so gross, folglich sind beide Quadratsummen gleich.

266. Die Summe der Quadrate aller Linien, welche die Halbirungspunkte je zweier von derselben Ecke auslaufender Seiten eines Sechsecks verbinden, ist so gross als die Quadratsumme aller Seiten.

Beweis. Die Halbirungslinien der in einer Ecke zusammenstossenden Seiten sind Hälften von 10 ganzen Seiten; die Halbirungslinien der in allen Ecken zusammenstossenden Seiten sind also Hälften von 60 ganzen Seiten, wobei vier und vier gleich sind, da im Ganzen nur 15 Seiten vorhanden sind. Quadriren wir, so erhalten wir 60 Viertelquadrate, also 15 vollständige Quadrate sämtlicher Seiten.

267. Allgemein ist die Summe der Quadrate aller Linien, welche in einem n eck die Halbirungs-

punkte je zweier von derselben Ecke auslaufender Seiten verbinden, $(n-2)$ mal so gross als der vierte Theil der Quadratsumme aller Seiten.

Beweis. Ergiebt sich durch ähnliche Betrachtungen wie voriger Satz.

268. Verbindet man in einem n eck die Halbirungspunkte sowohl von je zwei Seiten, die keinen gemeinschaftlichen Endpunkt haben, als auch von je zwei solchen, die von derselben Ecke auslaufen, so ist die Quadratsumme der ersteren Klasse von Verbindenden $\frac{n-3}{2}$ mal so gross als die Quadratsumme der zweiten Klasse.

Beweis. Bezeichnen wir die Quadratsumme der Seiten der Kürze wegen durch Σ , die der ersteren Verbindungslinien durch S und die der anderen durch S' , so ist nach 263.

$$S = \frac{(n-2)(n-3)}{2} \cdot \frac{1}{4} \Sigma \text{ und nach 267.}$$

$$S' = (n-2) \cdot \frac{1}{4} \Sigma, \text{ folglich}$$

$$S = \frac{n-3}{2} S', \text{ w. z. b. w.}$$

269. In jedem Vielecke ist die Summe der Quadrate aller Linien, welche jede Ecke mit den Halbirungspunkten aller nicht anliegenden Seiten verbinden, dreimal so gross als die Quadratsumme der Linien, welche die Halbirungspunkte je zweier von derselben Ecke auslaufender verbinden.

Beweis. Bezeichnen wir wieder die Quadratsumme der Seiten durch Σ , die der ersteren Verbindenden durch S , und der anderen durch S' , so ist nach 259.

$$S = (n-2) \cdot \frac{3}{4} \Sigma, \text{ hingegen nach 267.}$$

$$S' = (n-2) \cdot \frac{1}{4} \Sigma, \text{ folglich}$$

$$S = 3S', \text{ w. z. b. w.}$$

270. Damit in einem Vielecke die Summe der Quadrate der Linien, welche die Halbirungspunkte von

je zweien, keinen gemeinschaftlichen Endpunkt habenden Seiten verbinden, n mal so gross sei als die Quadratsumme derer, welche die Halbierungspunkte von je zweien, von derselben Ecke auslaufenden Seiten verbinden, muss die Anzahl der Ecken $2n+3$ betragen.

Beweis. Bezeichnen wir erstere Verbindungslinien durch S , letztere durch S' , so ist, wenn x vorläufig die Eckenzahl bezeichnet, nach 268:

$$S = \frac{x-3}{2} \cdot S'.$$

Soll nun $\frac{x-3}{2} = n$ sein, so muss $x-3=2n$

oder $x=2n+3$ sein, w. z. b. w.

II. Aufgaben.

271. Ein Viereck zu construiren, in welchem alle drei Paare der zugeordneten Seiten (verlängert) sich unter rechten Winkeln schneiden. (Fig. 119.)

Auflösung. Ist ABC ein gleichschenkliges Dreieck und man zieht dessen drei Höhen, so wird ein oben verlangtes Viereck gebildet, nämlich $ABDC$ ist ein solches Viereck, wie man sich leicht überzeugt.

Anmerkung. Ein Viereck von genannter Eigenschaft kann stets nur ein Viereck mit einem einspringenden Winkel sein. Sollten nämlich (Fig. 120.) in dem Viereck $ABCD$ die Winkel E und F Rechte sein, so müssten doch $\varphi + \psi = R$, also $\alpha + \beta = 3R$ sein. Gesetzt nun, es würde $\beta = 2R - \alpha$ angenommen, so müsste

$$\alpha = R + \alpha \text{ und noch einmal}$$

$$\alpha = R + \alpha$$

$$2\alpha + \beta = 4R + \alpha,$$

d. h. schon 3 Winkel grösser als $4R$ sein, da doch alle 4 Winkel nur $4R$ betragen.

272. Ein Dreieck in ein anderes zu verwandeln, so dass die Grundlinien beider zwar auf derselben geraden Linie liegen, sich aber um irgend eine gegebene Länge von einander unterscheiden. (Fig. 121.)

Auflösung. Man trage auf der Grundlinie des $\triangle ABC$ die gegebene Länge $= DC$ ab, verbinde D mit B , ziehe $CE \parallel BD$ und verbinde E mit D , dann ist

$$\triangle AED = \triangle ABC.$$

Beweis. Es ist $\triangle BDE = \triangle BDC$

$$\triangle ABD = \triangle ABD$$

folglich $\triangle AED = \triangle ABC.$

273. Ein Dreieck in ein anderes zu verwandeln, so dass die Grundlinien beider auf derselben Geraden liegen und ihre Höhen sich um eine gegebene Länge unterscheiden. (Fig. 122.)

Auflösung. Man ziehe im gegebenen Dreieck ABC die Höhe CD , trage die gegebene Länge $= CG$ darauf ab, ziehe GA und GB , dann $CE \parallel GA$, $CF \parallel GB$ und verbinde endlich G mit E und F , dann ist $\triangle EFG$ das verlangte.

Beweis. Aehnlich dem vorigen.

274. Ein Dreieck in ein anderes zu verwandeln, in welchem sowohl die Grundlinie als einer der an ihr liegenden Winkel vorgeschriebene Grösse haben.

Auflösung. Man verwandle das Dreieck nach 272. in ein anderes, welches die gegebene Grundlinie hat, ziehe dann durch dessen Spitze eine Parallele mit der Grundlinie, trage an letztere den gegebenen Winkel an und verbinde den Durchschnittspunkt des gezogenen Schenkels und der Parallele mit dem andern Endpunkte der Grundlinie.

275. Ein Dreieck in ein anderes zu verwandeln, in welchem sowohl die Höhe als einer der an der Grundlinie liegenden Winkel vorgeschriebene Grösse haben.

Auflösung. Man verwandle das Dreieck nach 273. erst in ein solches, welches die gegebene Höhe hat und verfähre dann wie in 274.

276. Ein ungleichseitiges Dreieck in ein gleichschenkliges zu verwandeln, in welchem die Grundlinie eine gegebene Länge hat.

Auflösung. Man verwandle die Hälfte des gegebenen Dreiecks (Winkelspitze mit Mitte der Gegenseiten verbunden, giebt diese) nach 272. in ein Dreieck, welches die Hälfte der gegebenen Grundlinie zur Grundlinie hat und verwandle dasselbe in ein rechtwinkliges, so dass diese Grundlinie Kathete bleibt. Das so erhaltene Dreieck ist die durch die Höhe gebildete Hälfte des gesuchten gleichschenkligen.

277. Ein ungleichseitiges Dreieck in ein gleichschenkliges von vorgeschriebener Höhe zu verwandeln.

Auflösung. Aehnlich der vorigen.

278. Ein Parallelogramm durch eine Gerade zu halbiren, welche einer gegebenen Geraden parallel läuft.

Auflösung. Man ziehe durch den Durchschnittspunkt der Diagonalen eine Parallele mit der gegebenen Geraden.

Beweis. Folgt aus 111.

279. Ein Parallelogramm in ein anderes zu verwandeln, in welchem beide Paare der Gegenseiten vorgeschriebene Längen haben.

Auflösung. Man verwandle eins der durch eine Diagonale gebildeten Dreiecke nach 272. in ein ihm gleiches, welches die eine gegebene Seite zur Grundlinie hat, ziehe durch dessen Spitze eine Parallele mit der Grundlinie und schlage mit der zweiten gegebenen Seite aus einem Endpunkte der ersteren einen Bogen, der die Parallele schneidet. Verbindet man den Durchschnittspunkt mit den Endpunkten der ersteren gegebenen Seite, so erhält man ein Dreieck, welches, zum Parallelogramm ergänzt, das verlangte giebt.

Beweis. Hat keine Schwierigkeit.

Anmerkung. Trifft der Kreis die Parallele nicht, d. h. ist die zweite gegebene Seite kleiner als die Höhe des vorher gebildeten Dreiecks, so ist die Aufgabe unmöglich.

280. Ein ungleichseitiges Parallelogramm in ein gleichseitiges zu verwandeln.

Auflösung. Man verwandle die Hälfte des gegebenen Parallelogramms nach 276. in ein gleichschenkliges Dreieck und ergänze dieses zum Parallelogramm.

281. Ein Parallelogramm zu construiren, welches einem von zwei gegebenen Parallelogrammen an Inhalt, dem andern an Umfang gleich ist.

Auflösung. Man verwandle das erstere Parallelogramm nach 279. in ein anderes, welches die Seiten des zweiten zu Seiten hat.

Anmerkung. Die Aufgabe ist nicht immer möglich. (Vergl. 279. Anmerkung.)

282. Wenn eine beliebige Menge beliebiger Vielecke gegeben ist, ein Rechteck zu construiren, welches $\frac{m}{n}$ vom Flächeninhalte des einen, $\frac{m'}{n'}$ von dem des zweiten, $\frac{m''}{n''}$ von dem des dritten Vielecks etc. in sich fasst.

Auflösung. Man verwandle jedes Vieleck in ein Rechteck, so dass sämtliche Rechtecke eine gleiche Seite haben. Dann theile man die ungleiche Seite des ersten Rechtecks in n , des zweiten in n' des dritten in n'' etc. gleiche Theile, trage m Theile von den ersten Theilen, m' von den zweiten, m'' von den dritten etc. auf einer unbegrenzten Geraden ab und mache endlich die ganze abgetragene Länge zur einen und die allen Rechtecken gemeinsame Seite zur andern Seite eines Rechtecks. Dieses ist das verlangte.

Beweis. Hat keine Schwierigkeit.

Anmerkung. Ein neck verwandelt man in ein $(n-1)$ eck, wenn man ein Dreieck durch eine Diagonale abschneidet, durch dessen Spitze (Diagonale=Grundlinie) eine Parallele zieht, bis sie die Verlängerung einer an die Diagonale stossenden Vielecksseite trifft und den Durchschnittspunkt mit dem andern Endpunkte der Diagonale verbindet.

283. Ein Dreieck in ein anderes zu verwandeln, dessen Grundlinie mit der des gegebenen eine einzige gerade Linie bildet und dessen Spitze mit einem gegebenen Punkte zusammenfällt. (Fig. 76.)

Auflösung. Ist ABC das verlangte Dreieck, D der gegebene Punkt, so ziehe man DB und DC , dann durch A die Linien $AF \parallel DC$, $AE \parallel DB$, verbinde endlich E und F mit D , dann ist $\triangle DEF$ das verlangte.

Beweis. Folgt aus 192. (Liesse sich auch mit Zuziehung von 273. lösen.)

Anmerkung. Die Lösung ist im Wesentlichen dieselbe, wenn die Spitzen beider Dreiecke auf entgegengesetzter Seite der Grundlinie liegen.

284. Ein Dreieck in eine beliebige Anzahl gleicher Theile zu theilen, so dass die Theilungslinien von einer der Ecken auslaufen.

Auflösung. Man theile die Gegenseite der fraglichen Ecke in die verlangte Anzahl gleicher Theile und verbinde die Abtragungspunkte mit dieser Ecke.

285. Ein Dreieck durch Linien, die von einer seiner Ecken auslaufen, in eine beliebige Anzahl von Stücken zu theilen, welche ein beliebiges Grössenverhältniss zu einander haben, z. B. in fünf Stücke, so dass das zweite das dreifache des ersten, das dritte das zweifache des zweiten, das vierte viermal so gross als die drei ersten zusammengenommen, und das letzte zehnmal so klein, als die vier ersten zusammengenommen sind.

Auflösung. Die Aufgabe spricht im Allgemeinen die Forderung aus, dass ein Dreieck so getheilt werden solle, dass

der 1. Theil das n_1 fache einer Flächeneinheit

— 2. — — n_2 — — —

— 3. — — n_3 — — —

— : — — : — — —

— k. — — n_k — — —

beträgt. Zu diesem Ende theile man die der Ecke, von welcher aus die Theilung erfolgen soll, gegenüberliegende Seite in $(n_1 + n_2 + n_3 + \dots + n_k)$ gleiche Theile und verbinde die Ecke mit den Abtragungspunkten, welche n_1, n_2, n_3 etc. n_k Theile bezüglich abschneiden.

Beweis. Hat keine Schwierigkeit.

286. Ein Vieleck durch Linien, die von einer der Ecken auslaufen, in eine beliebige Anzahl gleicher Theile zu theilen. (Fig. 123.)

Auflösung. Haben wir zunächst das Viereck $ABCD$, das von A aus in n gleiche Theile getheilt werden soll, so verwandle man es (182. Anmerkung) in ein Dreieck ABE und theile dies nach 284. Fällt kein Theilpunkt auf CE , so ist die Aufgabe gelöst; fallen jedoch Theilpunkte (F, G) darauf, so ziehe man $FH \parallel GI \parallel AC$, dann sind $\angle ACH$, $\angle AHI$ und $\angle AID$ die noch fehlenden Theile.

Beweis. Denken wir noch A mit F und G verbunden, so

ist $\angle AFC = \angle AHC$ (gleiche Grundlinie und Höhe) ferner $\angle ACG = \angle AIC$, folglich auch

$$\angle AFG = \angle AHI,$$

$$\text{ferner } \angle ACE = \angle ADC$$

$$\angle ACG = \angle AIC, \text{ folglich}$$

$$\angle AGE = \angle ADI.$$

Es sind somit die ausserhalb des Vierecks fallenden Theile gleich den noch übrigen Dreiecken auf dem Viereck selbst; letzteres ist also in die verlangte Anzahl gleicher Theile getheilt.

Ganz auf dieselbe Weise verfährt man mit einem Fünfecke, indem man es vorher in ein Viereck verwandelt und allgemein mit einem n ecke, indem man es vorher in ein $(n-1)$ eck verwandelt.

287. Ein Vieleck durch Linien, die von einer der Ecken auslaufen, in eine beliebige Anzahl von Stücken zu zerlegen, die ein vorgeschriebenes Gröszenverhältniss zu einander haben.

Auflösung. Soll

der 1. Theil das n_1 fache

— 2. — — n_2 —

der 3. Theil das n_3 fache
 $\vdots$
 — k. — — n_k —

einer bestimmten Flächeneinheit sein, so theile man auf die im vorigen Satze angegebene Weise das Vieleck in $(n_1 + n_2 + n_3 + \dots + n_k)$ Theile, dann bilden die n_1 ersten Theile das 1te Stück, die n_2 folgenden Theile das 2te Stück, die n_3 folgenden das 3te Stück u. s. f.

Beweis. Folgt aus vorigem Satze.

288. Wenn auf einer der Seiten eines Dreiecks ein Punkt gegeben ist, durch ihn eine Gerade so zu ziehen, dass durch dieselbe das Dreieck halbirt wird.

Auflösung. Man verwandle das Dreieck in ein gleiches, was seine Spitze in dem gegebenen Punkte hat (283.) und theile dieses von der Spitze aus in zwei gleiche Theile (284.). Fiele der Theilungspunkt etwa auf die Verlängerung, so macht man es wie in 286. angegeben worden ist.

289. Ein Vieleck in eine beliebige Anzahl gleicher Theile zu theilen durch Linien, die von einem Punkte auslaufen, der auf einer seiner Umfangsseiten liegt.

Auflösung. Man verwandle das Vieleck in ein gleichflächiges, was in dem gegebenen Punkte seine Spitze hat (ganz auf ähnliche Weise wie 286. Anmerkung. angegeben worden ist,) und verfähre dann ganz so wie in 286.

290. Ein Dreieck durch gerade Linien, welche von einem innerhalb des Dreiecks gegebenen Punkte ausgehen, in beliebig viel gleiche Theile zu theilen.

Auflösung. Ist (Fig. 124.) ABC das zu theilende Dreieck D der innerhalb liegende Punkt, so verwandeln wir ersteres erst in ein Dreieck, welches in D seine Spitze hat, indem wir DB und DC ziehen, dann $AE \parallel DB$, $AF \parallel DC$ und endlich DE und DF ziehen. Dass $\angle EDF = \angle ABC$, ist leicht einzusehen. Man theile nun die Grundlinie EF in die verlangte Anzahl gleicher Theile und verbinde die Abtragungspunkte mit D . Fällt kein Abtragungspunkt auf eine der Verlängerungen von BC , so ist auch $\angle ABC$ in der verlangten Weise

getheilt. Fällt jedoch ein Abtragungspunkt (c) auf die Verlängerung der Grundlinie bc, so ziehe man $cn \parallel cd$ und verbinde noch n mit d, so schneidet letztere Linie noch das letzte Stück ab. Fie-
len mehrere Punkte auf die Verlängerungen, so würde man mit diesen ganz auf dieselbe Weise verfahren.

Beweis. Ganz ähnlich dem zu 286.

291. Ein Vieleck durch Linien, welche von einem Punkte innerhalb desselben auslaufen, in eine beliebige Anzahl gleicher Theile zu theilen.

Auflösung. Sei zunächst die Figur ein Viereck, so verwandle man dasselbe in ein Dreieck, dieses dann nach vorigem Satze in ein Dreieck, welches seine Spitze in dem gegebenen Punkte hat und theile dann die Grundlinie des jetzt erhaltenen Dreiecks in n gleiche Theile. Fallen Theilpunkte über denjenigen Theil der Grundlinie, welcher die Vierecksseite bildet, hinaus, so schafft man die herausfallenden Theile auf ähnliche Weise auf die Figur wie in 286. Hieraus ergibt sich zugleich, wie man bei einer mehrseitigen Figur zu verfahren hat.

292. Ein Vieleck durch Linien, welche von einem beliebigen Punkte innerhalb desselben auslaufen, in eine beliebige Menge von Stücken zu theilen, welche ein vorgeschriebenes Grössenverhältniss zu einander haben.

Auflösung. Sollen die einzelnen Stücke $n_1, n_2, n_3, \dots, n_k$ Flächeneinheiten bezüglich enthalten, so theile man das Vieleck in $(n_1 + n_2 + n_3 + \dots + n_k)$ gleiche Theile (291.), dann theilen die n_1 te, n_2 te, n_3 te $\dots$ n_k te Theilungslinie die Figur bezüglich in die verlangten Stücke.

293. Wenn zwei begrenzte gerade Linien (AB, CD, Fig. 125.) und eine unbegrenzte (MN) gegeben sind, den Punkt (x) zu finden, der, mit den Endpunkten der beiden anderen Geraden verbunden, zwei gleichflächige Dreiecke ($xAB = xCD$) giebt.

Auflösung. Man verlängere beide begrenzte Linien AB und CD bis zum Durchschnitt in e, trage von diesem aus auf den Ver-

längerungen Stücke ab bezüglich gleich den verlängerten Linien $EG=AB$, $EF=DC$) und beschreibe das $\parallel$ gr $EFHG$. Die verlängerte Diagonale EH trifft die Gerade in dem verlangten Punkte x .

Beweis. Es ist

$$\angle EGH = \angle EFH,$$

also auch

$$GI=FK,$$

und deshalb auch

$$\angle EGX = \angle EFX,$$

mithin auch

$$\angle ABX = \angle DCX, \text{ w. z. b. w.}$$

294. Den pythagoräischen Lehrsatz nach (Fig. 126.) zu beweisen.

Beweis. Ist ABC das rechtwinklige Dreieck, so beschreibe man über der Hypotenuse BC auf derselben Seite, wo das Dreieck liegt, ein Quadrat $BCDE$, falle $EF \perp AB$, ziehe durch D die Gerade $GH \parallel EF$, verlängere BA bis I und falle noch EG und CH auf GH ; dann ist zunächst

$$\angle EBF \cong \angle ABC \cong \angle DEG \cong \angle CDH,$$

denn es ist

$$BC=EB=ED=DC$$

$$\angle ABC = \angle FEB = \angle GED = \angle HDC,$$

die drei ersten, weil sie durch denselben Winkel zu einem Rechten ergänzt werden, die beiden letzten, weil sie durch einen Rechten zu einem Gestreckten ergänzt werden; ausserdem sind alle 4 Dreiecke rechtwinklig. Hieraus folgt

$$AB=EF=EG \text{ und } AC=CH,$$

folglich sind $\parallel$ gr $EFHG$ und $\parallel$ gr $ACHI$ die Kathetenquadrate. Diese haben nun mit dem Hypotenusenquadrat das Fünfeck $EFACD$ gemein. Wird zu diesem zweimal das ursprüngliche Dreieck zugenommen, so entsteht oberhalb das Hypotenusenquadrat, unterhalb die Quadrate über den Katheten.

295. Den Pythagoräischen Lehrsatz nach Fig. 127. zu beweisen.

Beweis. Es ist $BCED$ das Quadrat über BC , $ABGF$ das Quadrat über AB , $ACHI$ das Quadrat über AC , ferner ist $EN \perp CF$,

$AQ \perp EC$, $LK \perp BC$ und noch AD gezogen, dann ist, wie sich leicht ergibt:

$$\angle ABC \cong \angle ENC \cong \angle BDG, \dots (1.)$$

$$\text{also auch } NE = AC = GD \dots (2.)$$

$$NC = AB = GF$$

folglich auch $DF = AN$ (wegen (2) und (3))

$$\text{folglich } \angle NOA \cong \angle DFM \dots (4.)$$

Ferner $\angle LEO \cong \angle APQ$ und

$$\angle APC \cong \angle MEN \text{ (wegen (2.))}$$

$$\text{folglich } \angle ACK \cong \angle MLN \dots (5.)$$

Endlich ist $\angle AEC \cong \parallel \text{gr } \frac{1}{2} AIHC$ (wegen (2.))

$$\text{folglich } \parallel \text{gr } LECK = \parallel \text{gr } AIHC \dots (6.)$$

Nehmen wir nun die einzelnen Stücke zusammen, so ist

$$DMAB = DMAB$$

$$\angle ABC = \angle BDG \text{ nach (1).}$$

$$\angle AON = \angle DFM \text{ nach (4.)}$$

$$LECA + MLON = AIHC \text{ nach (5) und (6), folglich}$$

$$BCED = ABGF + ACHI \text{ oder}$$

$$BC^2 = AB^2 + AC^2, \text{ w. z. b. w.}$$

296. Den Pythagoräischen Lehrsatz nach Fig. 128. zu beweisen.

Beweis. Es ist

$$BCED = BC^2,$$

$$ABFN = AB^2,$$

$$ACIK = AC^2.$$

Ferner ist das $\parallel \text{gr } GINF$ in leicht zu übersehender Weise vervollständigt. Zunächst ist nun offenbar $\angle ABC \cong \angle BCG \cong \angle BDF \cong \angle DEH \cong \angle ECI$; ferner

$$\angle DNM \cong \angle ELK, \text{ folglich auch}$$

$$NMEH = LCIK \dots (1.)$$

Ferner ist

$$\angle BCL \cong \angle ABC, \text{ also}$$

$$MALE = \angle ABC = \angle DEH \dots (2.)$$

Nehmen wir die Stücke zusammen, so haben wir

$$DBAM = DBAM$$

$$\angle ABC = \angle BDF$$

$$MELA = \angle NMD + \angle LCIK \text{ wegen (2.) und (1.)}$$

$$\angle ALC = \angle ALC, \text{ also}$$

$$BCED = ABFH + ACIK \text{ oder}$$

$$BC^2 = AB^2 + AC^2, \text{ w. z. b. w.}$$

297. Den Pythagoräischen Lehrsatz nach Fig. 129. zu beweisen.

Beweis. Sind abwärts vom $\angle ABC$ die Seitenquadrate beschrieben, ferner $IK \parallel BC \parallel FL$, $AO \parallel BE$, $EN \parallel AB$ gezogen und N mit D verbunden, so ist zunächst $ACDN$ ein $\parallel$ gr ($AN \parallel BE \parallel CD$), folglich

$$\angle END \cong \angle ABC \text{ (alle drei Seiten gleich).}$$

Nun ergibt sich leicht

$$\begin{aligned} 1) \quad MCDO &= ACDN \text{ (gleiche Höhe und Grundlinie)} \\ &= BCIK \text{ (congruent)} \\ &= ACIK \text{ (gleiche Höhe und Grundlinie).} \end{aligned}$$

Ferner

$$\begin{aligned} 2) \quad BMOE &= BANE \text{ (gleiche Höhe und Grundlinie)} \\ &= FBCL \text{ (congruent)} \\ &= ABFG \text{ (gleiche Höhe und Grundlinie).} \end{aligned}$$

Aus 1) und 2) ergibt sich durch Addition:

$$\begin{aligned} BCDE &= ACIH + ABFG \text{ oder} \\ BC^2 &= AC^2 + AB^2, \text{ w. z. b. w.} \end{aligned}$$

298. Den Pythagoräischen Lehrsatz nach Fig. 130. zu bewiesen.

Beweis. Man beschreibe abwärts vom Dreieck ABC die Seitenquadrate, trage $\angle EDK \cong \angle ABC$ in verwendeter Lage an ED an, ziehe AK , ferner IG und FH . Dass letztere durch A gehen muss, erhellt sofort.

$$\text{Nun ist } \left. \begin{aligned} ACDK &\cong HBCF \\ ABEK &\cong HIGF \end{aligned} \right\} (103.)$$

$$\text{folglich } ACDKEB = BCFGIH.$$

Subtrahiren wir noch beiderseits $2\angle ABC$, so erhält man

$$\begin{aligned} BCDE &= ABHI + ACFG \text{ oder} \\ BC^2 &= AB^2 + AC^2, \text{ w. z. b. w.} \end{aligned}$$

299. Den Pythagoräischen Lehrsatz nach Fig. 131. zu beweisen.

Beweis. Man zeichne über den Seiten des $\triangle ABC$ die Quadrate abwärts vom Dreieck, verlängere HI, BE bis M; GF bis L, CD bis N und ziehe noch AL; dann ist

$$\triangle HBM \cong \triangle ABC \text{ (eine Seite und zwei Winkel gleich)}$$

$\triangle LGA \cong \triangle ABC$ (zwei Seiten und der eingeschlossene Winkel gleich). Aus letzterer Congruenz folgt

$$AL \parallel MB,$$

folglich ist LAK eine gerade Linie. Nun ist

$$\parallel \text{ gr } BK = \parallel \text{ gr } BL = \parallel \text{ gr } BI \text{ (gleiche Höhe und Grundlinie),}$$

ferner $\parallel \text{ gr } KC = \parallel \text{ gr } CL = \parallel \text{ gr } CG$, also

$$\parallel \text{ gr } BD = \parallel \text{ gr } BI + \parallel \text{ gr } CG \text{ oder}$$

$$BC^2 = AB^2 + AC^2, \text{ w. z. b. w.}$$

300. Den Pythagoräischen Lehrsatz nach Fig. 132. zu beweisen.

Beweis. Man construiere über BC das Hypotenusenquadrat und $\triangle BGC \cong \triangle ABC$, fälle DH auf die verlängerte GC, EI auf die verlängerte DH; dann folgt leicht

$$\triangle BGC \cong \triangle CHD \cong \triangle DIE \cong \triangle EFB \cong \triangle ABC,$$

ferner ist $\parallel \text{ gr } IG$ ein Quadrat, und zwar dessen Seite $IF = AB - AC$; endlich ist $\triangle ABC = \frac{1}{2}(AB \times BC)$, d. h. gleich dem halben Rechtecke aus AB und AC (I. §. 99^b. 1.) und wir haben deshalb, weil

$$BCDE = 4 \triangle ABC + IHGF,$$

$$BC^2 = (AB - AC)^2 + 4 \cdot \frac{1}{2}(AB \times AC)$$

$$= AC^2 + AC^2 - 2 \cdot AB \times AC + 2 \cdot AB \times AC \text{ (I. §. 100^b. 2.)}$$

$$= AB^2 + AC^2, \text{ w. z. b. w.}$$

Dritter Abschnitt.

Vermischte Aufgaben mit Auflösungen, aber ohne Beweise.

301. Innerhalb eines Dreiecks den Punkt zu finden, dessen Verbindungslinien mit den Winkelspitzen das Dreieck in drei gleiche Theile theilen.

Anflösung. Man überzeugt sich leicht, dass dieser Punkt der Schwerpunkt, d. h. der Durchschnittspunkt der die Winkelspitzen mit den Halbirungspunkten der Gegenseiten verbindenden Transversalen ist, indem sich leicht zeigen lässt, dass von den gebildeten 3 Dreiecken je zwei gleiche Höhe und Grundlinie haben. (Dass sich kein zweiter solcher Punkt finden lässt, folgt leicht indirect, indem man auf die Ungereimtheit kommt, dass ein Dreieck einem andern, von dem es ein Theil ist, gleich sein müsste.)

302. Ein Paralleltrapez in n gleiche Theile so zu theilen, dass alle Theilungslinien im Durchschnittspunkte der nicht parallelen Seiten convergiren.

Auflösung. Man verbinde die Halbirungspunkte der nicht parallelen Seiten, theile diese Linie in n gleiche Theile und ziehe durch diese Theilungspunkte und den Durchschnittspunkt der nicht parallelen Seiten gerade Linien durch das ganze Paralleltrapez. Diese theilen dasselbe in der verlangten Weise.

Zusatz. Diese Auflösung behält auch noch ihre Richtigkeit, wenn sich der Convergenzpunkt der Theilungslinien irgend wo anders, nur zwischen den Verlängerungen der nicht parallelen Seiten oder auf einer von ihnen befindet.

303. Ein Paralleltrapez in n gleiche Theile zu theilen, so dass die Theilungslinien bestimmte Richtungen haben.

Auflösung. Man theile die Verbindungslinien der Halbierungspunkte (Mittellinie) der nicht parallelen Seiten in n gleiche Theile und ziehe durch die einzelnen Theilungspunkte gerade Linien in den verlangten Richtungen.

Anmerkung. Ist die Aufgabe immer lösbar?

304. Ein Paralleltrapez in eine ungerade Anzahl gleicher Theile zu theilen, welche sämmtlich gleichen Umfang haben.

Auflösung. Sind a, b die parallelen, c, d die nicht parallelen Seiten, so theile man die Mittellinie in die verlangte Anzahl gleicher Theile, ziehe durch den an c nächsten Theilungspunkt zwischen den Parallelen eine Gerade $= d$, durch die folgenden eine Gerade $= c$ und so abwechselnd fort.

305. Es sind zwei Punkte gegeben und eine gerade Linie; man soll den Punkt der Geraden finden, für welchen die Summe seiner Abstände von den gegebenen Punkten ein Kleinstes (*Minimum*) ist.

Auflösung. Man fälle von dem einen der auf einer Seite der Geraden liegenden Punkte ein Loth auf die Gerade, verlängere es um seine eigene Länge über dessen Fusspunkt hinaus und verbinde den Endpunkt der Verlängerung mit dem zweiten gegebenen Punkte. Wo diese Verbindungslinie die gegebene Gerade trifft, das ist der gesuchte Punkt.

Anmerkung. Liegen beide Punkte auf verschiedenen Seiten der Geraden, so trifft offenbar die Verbindungslinie der Punkte selber die Gerade in dem verlangten Punkte.

306. Ein Dreieck zu construiren, dessen Seiten durch drei gegebene Punkte gehen, dessen Winkel gegeben sind und dessen eine Seite eine gegebene Richtung hat.

Auflösung. Sind x, y, z die drei gegebenen Punkte, α, β, γ die Winkel, so ziehe man durch x eine Gerade in der ge-

122 Vermischte Aufgaben mit Auflösungen, aber ohne Beweise.

gebenen Richtung und an dieselbe von y und z aus Linien bezüglich unter den Winkeln α und β . Rückwärts verlängert, schliessen diese Linien mit der ersteren das verlangte Dreieck ein.

307. Es sind zwei parallele Geraden und in ihnen zwei beliebige Punkte A und B und ausser ihnen noch ein dritter Punkt C gegeben; man soll vom dritten Punkte C durch die Parallelen eine Gerade ziehen, welche erstere in M und N so schneidet, dass die Stücke zwischen den Durchschnittspunkten und den auf den Parallelen gegebenen Geraden eine constante Summe geben ($AM + BN = s$.)

Auflösung. Man ziehe AB , halbire sie in E , ziehe $EF \parallel$ der Parallelen, mache $EF = s$ und ziehe eine Gerade durch C und F . Das ist die verlangte.

308. Wenn wir die vorige Bezeichnung beibehalten, so soll eine ähnliche Linie gezogen werden, so dass $AM - BN = d$ werde und AB von derselben nicht geschnitten werde.

Auflösung. Man trage von A aus $AE = d$ ab, ziehe BE und dann $CM \parallel BE$, dann ist, wenn CM die zweite Parallele in N schneidet, $AM - BN = BE = d$.

309. Es sind zwei parallele Linien und in jeder ein Punkt (A, B) und ausserhalb ein dritter Punkt C gegeben, man soll von C aus eine die Linie AB schneidende Gerade ziehen, welche die parallelen Linien in M und N so schneidet, dass $AM - AN = d$ werde.

Auflösung. Man trage von A aus die Länge $d = AX$ ab, ziehe BX , halbire diese Linie in Y und ziehe CY . Diese Linie schneidet die Parallelen in der verlangten Weise.

310. Es ist ein Dreieck ABC gegeben, man soll zwischen zwei Seiten AB und AC desselben eine Parallele DE mit der dritten BC ziehen, dass DC (D liegt auf AC) $= DE$ werde.

Auflösung. Man halbire den Winkel bei c , dann ist der Durchschnittspunkt der Halbirenden mit AB ein Endpunkt der Parallelen.

311. Es ist ein Dreieck ABC gegeben, man soll zwischen zwei Seiten AB und AC desselben eine Parallele mit der dritten Seite BC so ziehen, dass wenn sie AC in D , AB in E schneidet, $DE = EB + DC$ werde, d. h. dass die Parallele gleich werde der Summe der Abschnitte der beiden nicht parallelen Seiten zwischen der Parallelen und der parallelen Seite.

Auflösung. Man halbire beide Winkel an bc und ziehe durch den Durchschnittspunkt desselben F eine Parallele mit bc . Diese ist die verlangte.

312. Alles sei wie vorher, nur soll die Parallele DE die Verlängerungen von AB und c so schneiden, dass $DE = DC + EB$ werde.

Auflösung. Aehnlich wie vorher, nur dass man die zwischen den Verlängerungen liegenden Nebenwinkel der vorher getheilten Winkel halbirt.

313. Alles sei wie vorher, nur soll eine Parallele DE gezogen werden, so dass $DE = DC - EB$ werde.

Auflösung. Man halbire, wenn ac die grössere Seite ist, den Winkel c und den auf derselben Seite mit dem Dreiecke von bc liegenden Nebenwinkel von b . Der Durchschnittspunkt der Halbirenden liegt in der Verlängerung der gesuchten Parallelen.

314. Ein Paralleltrapez zu zeichnen, wenn eine der parallelen und eine der nicht parallelen Seiten, der von beiden eingeschlossene Winkel und die durch die Spitze desselben gehende Diagonale gegeben sind.

Auflösung. Man mache den einen Schenkel des gegebenen Winkels gleich der einen und den andern Schenkel gleich der anderen gegebenen Seite, ziehe durch den Endpunkt desjenigen Stücks, welches eine der nicht parallelen Seiten werden soll,

eine Parallele mit dem andern Schenkel und beschreibe mit der gegebenen Diagonale aus dem Scheitel des gegebenen Winkels einen Kreisbogen, welcher die gezogene Parallele schneidet. Diesen Durchschnittspunkt verbinde man endlich noch mit den Endpunkten der parallelen Seiten.

315. Ein Paralleltrapez zu zeichnen, wenn beide parallele Seiten, ein Winkel und die durch dessen Scheitel gehende Diagonale gegeben ist.

Auflösung. Man trage auf einem Schenkel des gegebenen Winkels beide gegebene parallele Seiten vom Scheitel aus ab, schlage aus dem Scheitel des Winkels mit der gegebenen Diagonale einen Kreis und ziehe durch den Endpunkt derjenigen abgetragenen Seite, an welcher der Winkel nicht liegen soll, eine Parallele mit dem andern Schenkel bis zum Durchschnitte mit dem Kreise. Diesen Durchschnittspunkt verbinde man mit dem Endpunkte des andern abgetragenen Stücks und ziehe zuletzt noch mit diesem Stücke eine Parallele durch vorerwähnten Durchschnittspunkt.

Welcher Durchschnittspunkt des Kreises ist zu wählen?

Jacobi, Karl Friedrich Andreas / Jacobi, Karl Friedrich Andreas, / Wiegand,
August,

Geometrische Lehrsätze und Aufgaben aus des Herrn Professor C. F. A.
Jacobi Anhängen zu van Swinden's Elementen der Geometrie mit Beweisen,
Auflösungen und Zusätzen
Bd.: 1

Halle 1847

Passau, Staatliche Bibliothek -- S nv/OS 72-1/2
urn:nbn:de:bvb:12-bsb11346068-2